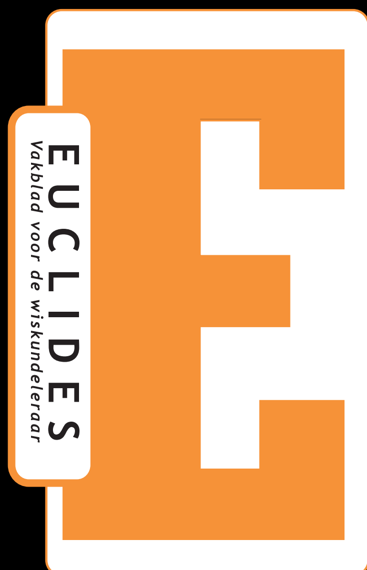
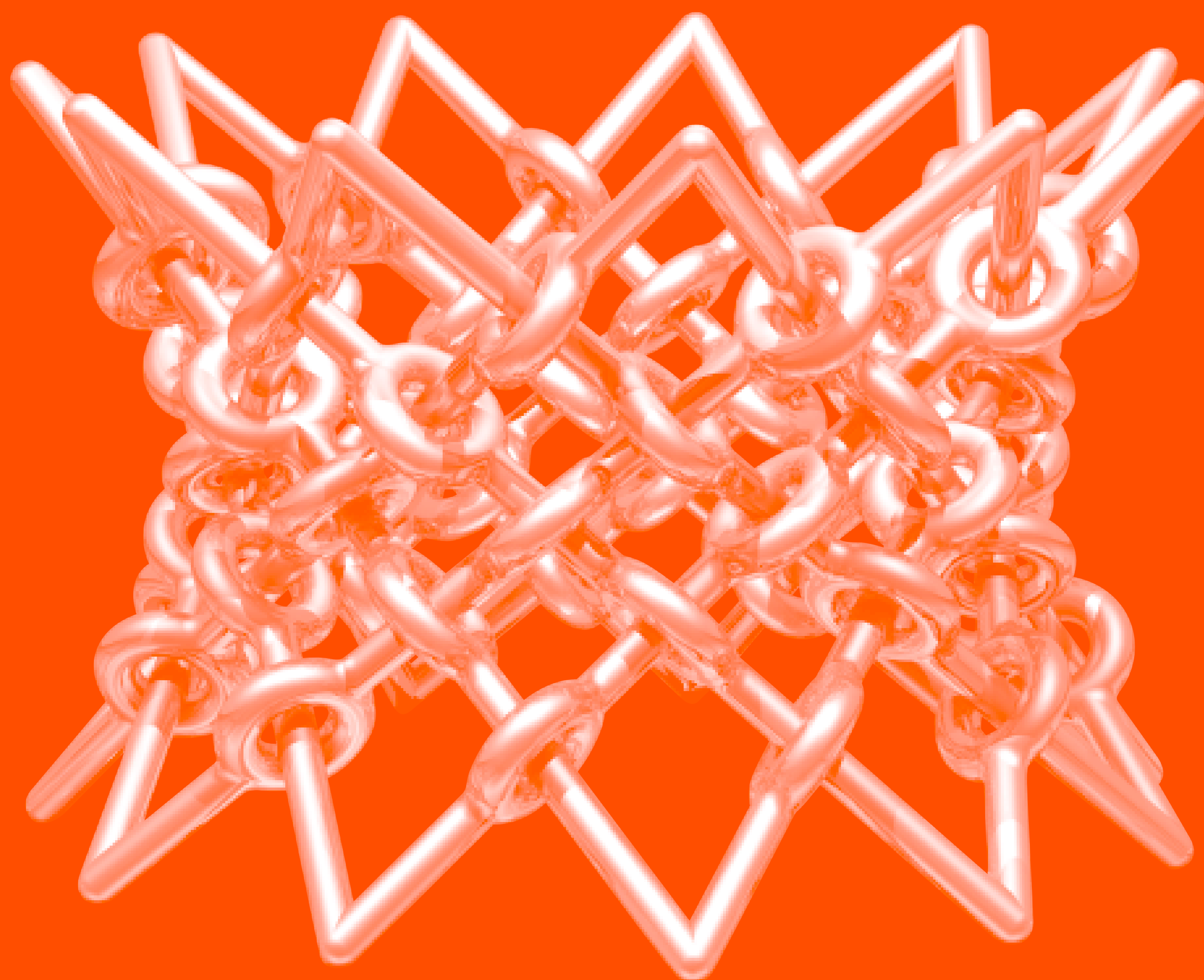
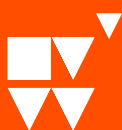


Kunst & Wiskunde

januari
2004/nr.4
jaargang 79





orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl



Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Rinus Roelofs, Hengelo
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 42,50
Studentleden: € 22,50
Gepensioneerden: € 27,50
Leden van de VVWL: € 27,50
Lidmaatschap zonder Euclides: € 27,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 47,50
Instituten en scholen: € 127,50
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Willem Maas
Molenveld 104, 2490 Balen, België
e-mail: w.maas@nvvw.nl
tel. vanuit Nederland: 003214814527
fax: 003214813753

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

4
januari 2004 JAARGANG 79

INHOUD

Aan deze special werkten verder mee Peter Boelens en Chris van der Heijden.

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Kunstspecial

Voor u ligt een dubbeldik nummer van Euclides, een special gewijd aan het thema *Kunst & Wiskunde*. We hopen dat we met dit onderwerp velen van u kunnen boeien, plezieren en inspireren!
Ook alle deelnemers aan de Nationale Wiskunde Dagen (NWD) ontvangen deze special. Aangezien het nu de tiende keer is dat het Freudenthal Instituut dit bijzondere evenement organiseert en 'wiskunde en kunst' dit jaar één van de thema's is, leek het de NVvW een aardig idee om dit speciale kunstnummer van Euclides als cadeautje mee te geven aan de NWD-deelnemers.
NVvW-leden die begin februari de NWD bezoeken, zullen dit dubbelnummer dus dubbel ontvangen. Geen probleem natuurlijk: in dat geval doet u gewoon een collega een plezier met uw tweede exemplaar… Wie weet gaat er een wervend karakter van uit, en meldt hij of zij zich vervolgens aan als lid van de Vereniging!

Inhoud

Uiteraard zijn bijna alle artikelen in dit nummer gewijd aan het thema *Kunst & Wiskunde*; zie de 'Leeswijzer' op pagina 130 voor een inleiding en een overzicht. Daarnaast zijn er ook een paar andere bijdragen. Zo stelde Metha Kamminga een foto-impressie samen van de NVvW-studiedag van 15 november jl. Rob Bosch laat u meedenken over een aftelversje, een leuk wiskundig probleem in het kader van zijn rubriek 'RE:*Cursief*'. Verder vindt u op de Verenigingspagina's de reactie van NVvW-voorzitter Marian Kollenveld op de voorstellen d.d. 4 december 2003 van minister Van der Hoeven voor de invulling van de profielen havo/vwo.

Tweede fase

Deze jongste voorstellen voor de Tweede fase (complete tekst: zie *www.nvvw.nl*) worden op 5 februari 2004 in de Tweede Kamer besproken. Voor het wiskunde-onderwijs had de minister nog steeds geen goed nieuws. Het *nieuwe geïntegreerde bètavak* is nu weliswaar gepromoveerd tot één van de mogelijk te kiezen *profielkeuzevakken* voor NT en NG, maar dat betekent *niet* automatisch dat scholen dit vak hoeven aan te bieden, en dàt betekent weer dat veel N-leerlingen dit vak dus niet eens zullen *kunnen* kiezen. Het houdt ook in, dat de aansluiting van 'harde' exacte vervolgopleidingen gebaseerd zal moeten worden op het nieuwe vak *wiskunde-B*, dat ten opzichte van het huidige wiskunde-B12 fors teruggaat in studielast: van 760 naar 520 slu in het vwo, van 440 naar 320 slu in het havo.
Voor 'zachte' bètastudies (met NG als toelatingsprofiel) zou *wiskunde-AB* voldoende basis moeten gaan vormen. Qua inhoudelijke invulling wordt dit een lastig punt, temeer daar het de bedoeling is dat de wiskundevakken AB en B elkaar nauwelijks gaan overlappen. (Wiskunde-AB wordt namelijk ook vermeld als eventueel te kiezen profielkeuzevak voor NT-leerlingen, en zij hebben immers al wiskunde-B in hun profieldeel.) Haast onvermijdelijk lijkt dit te gaan betekenen dat statistiek verdwijnt uit wiskunde-B vwo, maar wat te doen met de analyse? Zal die grotendeels geschrapt moeten worden uit het AB-programma, om aldus de overlap zo klein mogelijk te maken? Het hoger onderwijs in richtingen die aansluiten op de EM- en NG-profielen, zal zich in dat geval tevreden moeten stellen met aankomende studenten die niet of nauwelijks kennis gemaakt hebben met belangrijke concepten en vaardigheden uit de analyse, waaronder de differentiaalrekening.
Invoering van het vak 'basiswiskunde' in het gemeenschappelijk deel zou deze knelpunten kunnen wegnemen. Eenvoudiger is het overigens om de bestaande deelvakkenconstructie te handhaven, maar dat idee lijkt taboe op het ministerie.
… en dan heb ik het hier nog niet eens gehad over bijvoorbeeld het nieuwe en qua studielast sterk uitgebreide vak wiskunde A voor de vwo-CM-leerling…
Goed wiskundeonderwijs? Een KUNST op zich, met liefde bedreven door tal van enthousiaste en deskundige collega's!
Als wiskundeonderwijs straks maar geen raar en onwerkbaar kunstJE wordt…

LEESWIJZER

Ter inleiding op het thema ‘Kunst en wiskunde’

[Marja Bos]

Kunst en Wiskunde, dat thema lijkt op dit moment ineens weer overal op te duiken...
Toen de redactie begin april besloten had dit onderwerp te kiezen als thema voor onze jaarlijkse special, kwamen we het prompt op allerlei plekken tegen:
- het bleek één van de thema’s te worden van de Nationale Wiskunde Dagen 2004;
- het op 10 januari jl. gehouden Wintersymposium van het Koninklijk Wiskundig Genootschap werd georganiseerd rond ‘Wiskunde en Muziek’;
- en bovendien (maar dàt was ons toen al wél bekend) vierde de Stichting Ars et Mathesis (*www.arsetmathesis.nl*) afgelopen najaar haar twintig-jarig bestaan met onder meer de tentoonstelling ‘Bomen van Pythagoras II’.
Natuurlijk, het thema ‘kunst en wiskunde’ staat wel vaker in de schijnwerpers. Maar zo ineens, kort achter elkaar, op meerdere plaatsen tegelijk? Zou het te maken kunnen hebben met een behoefte om even de eigen aandacht af te leiden van ‘barre tijden’ in wiskundeonderwijsland en daaromtrent? Ach welnee, laten we het maar gewoon op toeval houden...

Bij het zoeken naar mogelijke bijdragen voor deze special hield de redactie het thema ‘kunst en wiskunde’ bewust heel open en breed:
- Niet elk artikel heeft rechtstreeks betrekking op wiskunde-*onderwijs*. U zult dus in de meeste bijdragen geen direct-bruikbare toepassingen vinden voor de wiskundeles.
- Er zijn vooraf géén specifieke, scherp afgebakende invalshoeken gekozen. We hadden deze special bijvoorbeeld kunnen beperken tot een meer samen-hangend thema als ‘kunst als wiskundige toepassing’, of ‘wiskunde naar aanleiding van een kunstwerk’, of ‘kunst en wiskunde: tegenstellingen en overeen-komsten’. Dat hebben we niet gedaan.
Deze special pretendeert dan ook beslist niet een afgewogen analyse of een ‘volledig’ beeld te bieden van het thema of van de diverse raakvlakken tussen kunst en wiskunde.
Doel is simpelweg u als wiskundedocent enige *inspiratie* te bieden - vanuit de invalshoek ‘kunst’.
Of, om redacteur Klaske Blom te citeren (zie haar verslag van het ISAMA-BRIDGES-congres): *‘Met welk doel haal ik kunst binnen? Bij welke onderwerpen? Verbetert het onderwijs als het leuker wordt? Is leuker maken een doel op zich omdat het leerlingen motiveert? En welke leerlingen raken gemotiveerd? En wie stoot het af?* [...] *Wat mij betreft is de winst* [...] *dat er weer een nieuwe invalshoek binnen handbereik gekomen is waarmee ik mijn didactiek zou kunnen uitbreiden.’*

Wat valt er dan uiteindelijk zoal te vinden in dit speciale nummer van Euclides?
Uiteenlopende kunstuitingen hebben er een plekje in gekregen: muziek, literatuur, beeldende kunst, ...
Zo worden afbeeldingen in het platte vlak door zowel Martin Kindt als Agnes Verweij in een wiskundig perspectief geplaatst. Dat gebeurt aan de hand van werk van respectievelijk Albrecht Dürer en Susanna van Steenwijck-Gaspoel.
Jan van de Craats laat u nader kennismaken met diverse raakvlakken tussen muziek en wiskunde.
Aad Goddijn bespreekt denkbeelden en opvattingen van Wordsworth en zijn geestverwanten uit de Romantiek, ten aanzien van ‘de rede’ en de wiskunde in het bijzonder.
Marjolein Kool schreef speciaal voor Euclides een paar nieuwe wiskundegedichten; Irene Dalm liet zich door haar inspireren bij een activiteit voor haar brugklas-leerlingen.
Ab van der Roest, Bart Heukelom en Ton Konings laten, via uiteenlopende activiteiten, leerlingen en studenten kennismaken met wiskunstige zaken in de ruimtelijke beeldende kunst.
Jan Hogendijk informeert ons over wiskundige aspecten in Islamitische kunstuitingen.
Frederik van der Blij verkent de opkomst van de abstractie, zowel in de kunst als in de wiskunde.
Wim Kleijne bewijst weer eens dat de gulden snede een rijke bron is.
Het thema Kunst en Wiskunde stond de afgelopen tijd ook tijdens diverse symposia in de belangstelling. Albert van der Schoot en Klaske Blom doen verslag van twee van zulke congressen.
Twee van onze vaste rubrieken werden aangepast aan het thema: Martinus van Hoorn laat zien hoe het jongerentijdschrift Pythagoras 40 jaar geleden aandacht besteedde aan ster-twaalfvlakken, Frits Göbel ontwierp voor de special een puzzel rond Borromeaanse ringen. Die bijzondere ringen kwam u ook al tegen op de voorkant van het oktobernummer van Euclides. Niet voor niets kregen en krijgen de omslagen van deze jaargang een bijzonder gezicht. Elk nummer is getooid met een prachtig ontwerp van Rinus Roelofs, ‘wiskunstenaar’ in hart en nieren. In deze special vindt u een interview met hem. Op de omslag van dit januarinummer ziet u zijn *‘Crossed Antiprism’*, de gestripte ribbefiguur van zo’n antiprisma, met regelmatige ster-elfhoeken als onder- en bovenvlak. Doordat de ribben van onder- en bovenvlak vervolgens zijn weggelaten, ontstaat één doorlopende lijn.

De redactie dankt de genoemde auteurs voor hun bijdragen aan dit speciale kunstnummer.
U als lezer wensen we veel inspiratie en leesplezier toe!

MUZIEK EN WISKUNDE

(G)een zweverig verhaal

[Jan van de Craats]

Inleiding

Over de band tussen muziek en wiskunde is veel te vertellen. Je zou het kunnen hebben over het zoeken naar schoonheid, het esthetische element, dat zowel in de muziek als in de wiskunde een drijvende kracht is. Of je zou de vaak gehoorde, maar nooit echt hard gemaakte bewering kunnen onderzoeken dat wiskundigen gemiddeld meer aanleg voor muziek hebben dan niet-wiskundigen. Ik geloof daar persoonlijk trouwens helemaal niets van, en bovendien zou ik niet weten hoe je dit soort uitspraken verantwoord zou moeten toetsen.
Een ander raakvlak tussen wiskunde en muziek zou liggen op het terrein van de getallenmystiek. Zo was er een tijd geleden veel publiciteit rond een boek waarin met behulp van telprocedures en berekeningen verbijsterende verbanden in Bachs muziek werden gevonden. Bach zou er allerlei geheime boodschappen in verstopt hebben, en onder andere ook zijn eigen sterfdatum hebben meegecomponeerd. Het is duidelijk dat je zulke verhalen niet serieus hoeft te nemen. Als je maar genoeg getallenmateriaal voorhanden hebt, in dit geval maten en muzieknoten om te tellen en te coderen, kun je er met selectieve methoden alles uithalen wat je maar wilt. Het zou me trouwens niets verbazen als je met zulke middelen uit Bachs koffiecantate de boodschap ‘Douwe Egberts’ zou kunnen destilleren.
Een andere zaak is dat Bach door de strenge muziekvormen die hij in veel gevallen koos, toehoorders en uitvoerders die daarvoor gevoelig zijn en die over de nodige muzikale basiskennis beschikken, niet alleen muzikaal-emotionele, maar zeker ook muzikaal-intellectuele ervaringen bezorgt. Het analyseren van de structuren die bijvoorbeeld aan de fuga’s ten grondslag liggen, heeft wel iets van het zoeken naar structuren dat ook aan de wiskunde eigen is, maar ik heb toch eigenlijk in zulke analyses nog nergens iets kunnen vinden waar echte, niettriviale wiskundige technieken en methodes tot nieuwe ontdekkingen hebben geleid. Ook hier dus vooral veel vaagheid en zweverigheid over de band tussen wiskunde en muziek.
Totaal niet vaag en zweverig is de twaalftoonsmuziek van Arnold Schoenberg en zijn leerlingen, die vooral in de tweede helft van de twintigste eeuw veel aandacht heeft gekregen. Bij de in die tijd ook ontwikkelde seriële muziek worden niet alleen de toonhoogte, maar ook allerlei andere muzikale parameters zoals maat, ritme en tijdsduur via ingenieuze combinatorische constructies in structuren gevangen. Of die structuren ook los van de geschreven partituur hoorbaar en invoelbaar zijn, is nog steeds een strijdpunt. In elk geval schijnt de mode tegenwoordig een beetje overgewaaid te zijn. De tijd zal leren wat er van de revolutionaire pretenties van de serialisten overblijft. Ik zal er in dit stuk geen aandacht aan besteden.

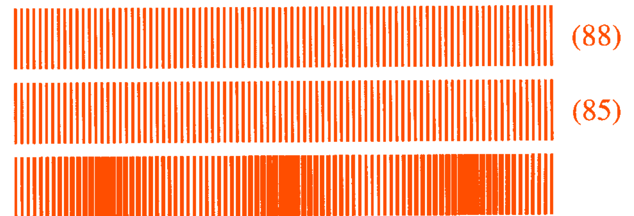
Zijn er verder nog serieuze, exacte verbanden tussen wiskunde en muziek? Wel degelijk. Ze liggen met name op het terrein van tonen en boventonen, harmonie, consonanten en dissonanten en de bouw van toonsystemen. Grote namen van wis- en natuurkundigen zijn ermee geassocieerd: Pythagoras, Ptolemaeus, Mersenne, Leibniz, Huygens, Euler, om er maar een paar te noemen. En in de negentiende eeuw Hermann Helmholtz, die het standaardwerk *Die Lehre von den Tonempfindungen* schreef dat vele malen herdrukt en aangevuld werd, en dat in Engelse vertaling nog steeds bij uitgeverij Dover verkrijgbaar is. Uit het brede scala van onderwerpen die daarin aan de orde komen, heb ik in mijn Zebra-boekje *De juiste toon* een keuze gemaakt. In dit artikel wil ik nog wat nader ingaan op een onderwerp dat ook interessant is voor wie geen diepgaande kennis van muziek heeft, namelijk het verschijnsel zwevingen. Daarmee wordt dit dus toch een ‘zweverig verhaal’, maar in een andere betekenis dan je op het eerste gehoor misschien zou denken.

Toonhoogte

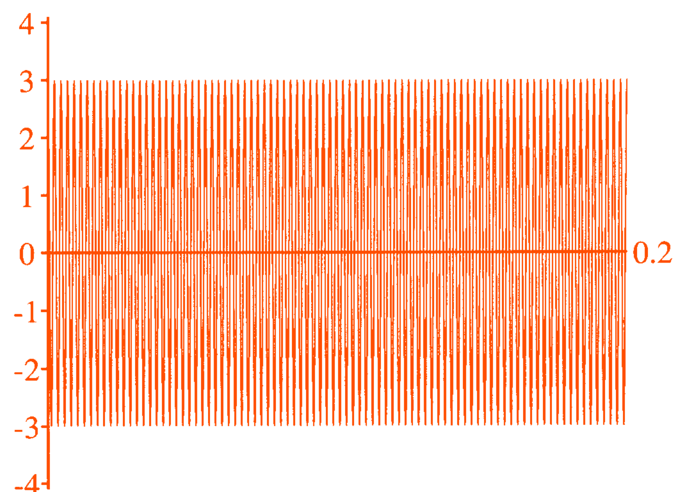
Zwevingen ontstaan wanneer twee tonen van ongeveer gelijke sterkte en bijna dezelfde toonhoogte klinken. Het gaat daarbij haast altijd om een onaangenaam, jankend geluid. Wanneer de toonhoogtes dichter bij elkaar komen, wordt het minder, en het verdwijnt helemaal als de toonhoogtes gelijk zijn. Ook kunnen zwevingen ontstaan als in de twee tonen boventonen meeklinken van voldoende sterkte met bijna dezelfde

toonhoogte. Je kunt van zwevingen gebruik maken als je een muziekinstrument stemt.
Hoe ontstaan zwevingen precies en wat zijn eigenlijk muzikale tonen? Dat zijn de eerste vragen waar we ons mee bezighouden.
Geluid bereikt ons oor via luchttrillingen, kleine fluctuaties in de luchtdruk die het trommelvlies in trilling brengen. Die trillingen worden omgezet in elektrische signalen die langs de gehoorzenuwen aan de hersenen worden doorgegeven. Zo horen we geluid.
Het meest karakteristieke van een muzikale toon is dat we er een *toonhoogte* aan kunnen toekennen. Analyse van zo'n signaal leert dat het dan gaat om een luchttrilling die *periodiek* is, althans in eerste benadering.
De frequentie ervan correspondeert met de toonhoogte: hoe hoger de toon, des te hoger ook de frequentie.
Bij hoorbare tonen gaat het om trillingen met een frequentie die tussen de twintig en twintigduizend Hertz (trillingen per seconde) ligt. Die hoge frequenties worden overigens alleen door jonge kinderen waargenomen; naarmate we ouder worden, schuift de grens waarboven we geen geluid meer horen, steeds verder naar beneden. Bij volwassenen ligt de drempel vaak al bij zestienduizend Hertz of lager.
Naast de toonhoogte, die dus met de frequentie correspondeert, heeft een muzikale toon nog twee andere karakteristieke eigenschappen: zijn sterkte (luidheid), die correspondeert met de amplitude van de trilling, en zijn klankkleur (ook wel timbre genoemd), die correspondeert met de specifieke vorm van het zich telkens herhalende golfje. Tonen met dezelfde toonhoogte die gespeeld worden op een piano, een orgel, een viool of een trompet klinken toch heel verschillend. Je ziet dat aan de vorm van het golfpatroon, dat je met behulp van een microfoon kunt registreren en op een computerscherm zichtbaar kunt maken.
De fourieranalyse leert hoe we elk periodiek geluidssignaal kunnen opbouwen als een reeks van zuivere sinusoïden dat wil zeggen signalen die beschreven kunnen worden door sinusfuncties, elk met hun eigen amplitude en fasehoek, en met een frequentie die een geheel veelvoud is van de frequentie van het gegeven signaal. Die tonen die horen bij die hogere frequenties heten de boventonen.
Een stemvork heeft als toon een zuivere sinusoïde, en in principe kun je elke toon dus krijgen door een groot aantal stemvorken, voor elke boventoon één, op het juiste moment en met de juiste sterkte aan te slaan. De fouriercoëfficiënten bepalen de amplitude en de fase van de boventonen waaruit zo'n toon is samengesteld.
Overigens, het periodieke karakter van zo'n toon kan natuurlijk alleen maar bij benadering gelden, in de eerste plaats omdat elke toon slechts een beperkte tijdsduur heeft, en vervolgens ook omdat tonen tijdens het spelen vaak in sterkte variëren: een pianotoon neemt na de aanslag snel in geluidssterkte af. Ook het 'aanzetverschijnsel', de manier waarop een toon begint, is vaak karakteristiek voor de aard ervan. Toch is ons gehoor zeer goed in staat om toonhoogtes, dat wil zeggen frequenties, in zeer korte tijd te detecteren,

FIGUUR 1



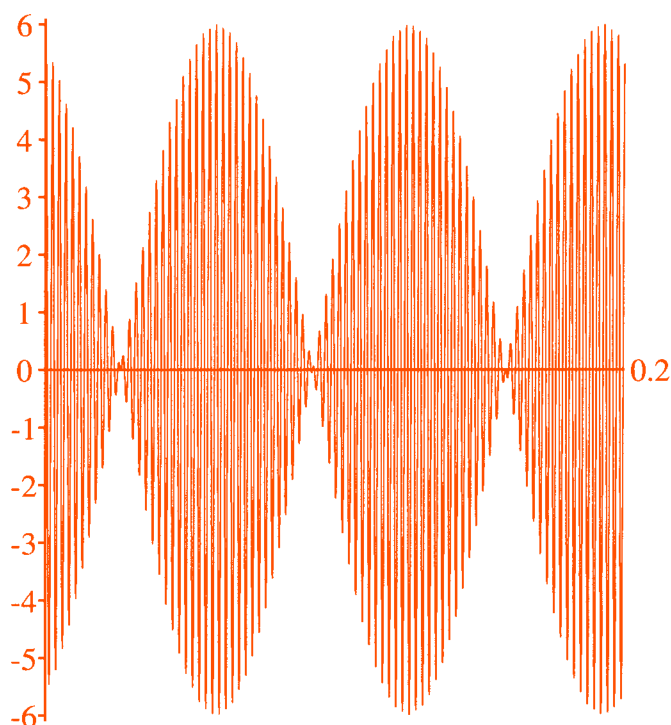
Het principe van zwevingen: de bovenste strook bevat 88 streepjes, de middelste 85. In de onderste strook zijn beide patronen over elkaar heen getekend. Er ontstaat een 'zwevingenpatroon' van 88 – 85 = 3 zwarte banden.



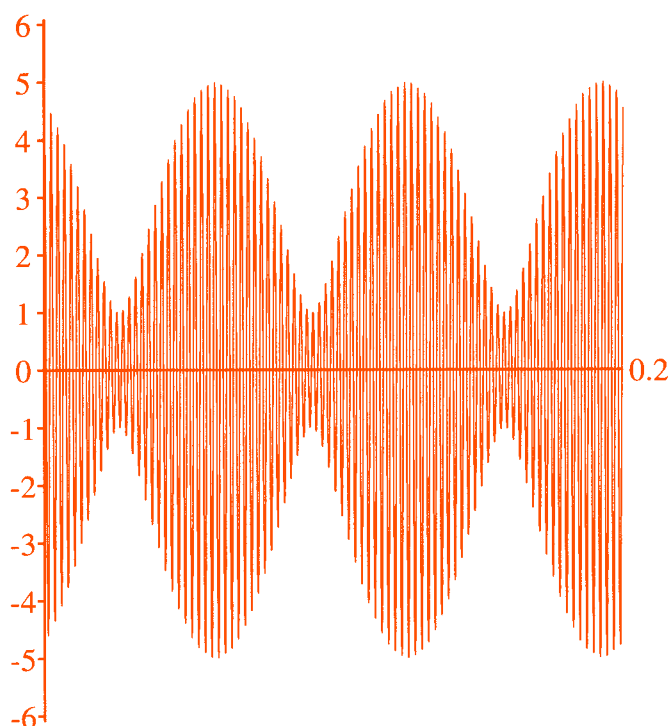
Het signaal $f_1(t) = 3\cos(880\pi t)$ voor $0 \leq t \leq 0{,}2$

FIGUUR 2

FIGUUR 3



Het signaal $f_1(t) + f_2(t) = 3\cos(880\pi t) + 3\cos(850\pi t - 0{,}7)$



Het signaal $f_1(t) + f_2(t) = 3\cos(880\pi t) + 2\cos(850\pi t - 0{,}7)$

FIGUUR 4

zelfs in zeer snelle loopjes op de piano. Een kritisch geval doet zich voor in het derde deel van Beethovens vijfde symfonie, waar de contrabassen een zeer snelle, zeer lage passage moeten spelen: de noten daarvan klinken zo kort dat elke noot maar een paar trillingen kan hebben geduurd. Toch herkennen we de melodie.

Een moiré-patroon

Om grip te krijgen op het verschijnsel zwevingen, hebben we eigenlijk helemaal geen sinusoïden en fourieranalyse nodig. De kern van de zaak zit in de periodiciteit en in de interferentie-eigenschappen van gesuperponeerde signalen: zijn de signalen in fase, dan versterken ze elkaar, en zijn ze in tegenfase, dan doven ze elkaar uit. We illustreren dat aan de hand van figuur 1. Je ziet daar in de bovenste strook 88 gelijkmatig verdeelde zwarte streepjes. In de middelste strook zijn het er 85, en in de onderste strook zijn de beide patronen over elkaar heen getekend. Er ontstaat dan een soort moiré-patroon waarin drie zwarte banden te zien zijn. Die zwarte banden treden op als de beide samenstellende stroken in tegenfase zijn, want dan vallen de streepjes van de middelste strook vrijwel tussen die van de bovenste strook. Zijn ze in fase, dan zien we ook in de onderste strook een duidelijke afwisseling van zwart en wit.

Waarom zijn er precies drie (dat wil zeggen 88 - 85) zwarte banden te zien? Met andere woorden, waarom zijn de twee signalen precies drie maal in tegenfase (en ook drie maal in fase, als je begin- en eindpunt met elkaar identificeert)? Om dat te begrijpen is het handig om een andere metafoor te gebruiken: een klok met twee wijzers. De ene wijzer draai precies 88 maal rond in een uur, en de andere wijzer iets langzamer: precies 85 maal. Ze beginnen tegelijk in de twaalfuurstand. Hoe vaak passeert de snelle wijzer daarna de langzame per uur? Natuurlijk drie maal. Op die momenten zijn de twee wijzers ‘in fase’. Ze zijn in tegenfase als ze precies tegenover elkaar staan, en ook dat gebeurt drie maal per uur.

Zwevingen bij gelijke amplitudes

Terug naar de geluidstrillingen. Een toon met een frequentie van 440 Hertz (de standaardtoon A die zich op een piano iets rechts van het midden van het klavier bevindt) geeft 440 maal per seconde een piek en een dal in de luchtdruk. Als je tegelijkertijd een iets lagere toon met een frequentie van 425 Hertz laat klinken, zullen de pieken van de beide tonen elkaar precies 15 keer per seconde versterken (als ze in fase zijn) en even zo vaak uitdoven (als ze in tegenfase zijn). Die uitdoving is volledig wanneer ze precies dezelfde golfvorm en amplitude hebben, anders is er onvolledige uitdoving, maar toch zul je dan nog steeds fluctuaties in de geluidssterkte waarnemen: 15 maal per seconde een piek en een dal. Dat zijn de zwevingen; ze treden dus precies in de verschilfrequentie op.

Overigens, die frequentie van 15 Hertz is natuurlijk niet de frequentie van het samengestelde signaal van de beide tonen. Als ze een irrationale frequentie-

verhouding hebben, zal het samengestelde signaal zelfs niet periodiek zijn!
Wanneer de beide tonen zuivere sinusoïden zijn, kun je het verschijnsel zwevingen ook goed analytisch beschrijven. Daartoe merken we eerst op dat je elke sinustoon kunt schrijven in de 'standaardvorm' $A\cos(2\pi\nu t+\varphi)$, waarin A de amplitude, ν de frequentie en φ de fasehoek is. Als t in seconden gemeten wordt, is de frequentie ν gegeven in Hertz. Een sinustoon van 440 Hertz met amplitude 1 en fasehoek 0 wordt dus gegeven door $\cos(880\pi t)$.
In figuur 2 is het signaal $f_1(t)=3\cos(880\pi t)$, dat een frequentie van 440 Hertz en een amplitude van 3 heeft, getekend op het interval $0\leq t\leq 0{,}2$. Er zijn dus 88 volledige periodes te zien.
We voegen daar een signaal $f_2(t)$ met een iets lagere frequentie, namelijk 425 Hertz, aan toe. Voor de eenvoud nemen we dezelfde amplitude, maar we passen wel een faseverschuiving toe:
$f_2(t)=3\cos(850\pi t-0{,}7)$.
Het samengestelde signaal wordt dus

$$f_1(t)+f_2(t)=3\cos(880\pi t)+3\cos(850\pi t-0{,}7)$$

In de grafiek ervan, zie figuur 3, is het verschijnsel zwevingen duidelijk zichtbaar. We zien een laagfrequente sinusoïde en het spiegelbeeld ervan in de t-as als 'omhullenden' van een hoogfrequent signaal waarvan de amplitude sterk varieert. De omhullenden hebben op het tijdsinterval $0\leq t\leq 0{,}2$ drie pieken, dus vijftien pieken per seconde, precies de verschilfrequentie van de beide signalen: $440-425=15$. Wat je hoort, is een toon met de frequentie van het hoogfrequente signaal, die vijftien maal per seconde aanzwelt en weer uitdooft: een onaangenaam, jankend geluid.
Ook analytisch kan dit verklaard worden. Met behulp van de gonioformule

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

is het signaal $f_1(t)+f_2(t)$ te schrijven als

$$f_1(t)+f_2(t)=6\cos(15\pi t+0{,}35)\cos(865\pi t+0{,}35)$$

De factor $\cos(865\pi t+0{,}35)$ representeert het hoogfrequente signaal, dat blijkbaar een frequentie heeft van 432,5 Hertz, het gemiddelde van 440 Hertz en 425 Hertz. De laagfrequente factor $6\cos(15\pi t+0{,}35)$ is op te vatten als een langzaam (dat wil zeggen langzaam ten opzichte van het hoogfrequente signaal!) fluctuerende 'amplitude' die vijftien keer per seconde de maximale waarde $+6$ of -6 aanneemt. Inderdaad: vijftien keer, en niet zeveneneenhalve keer, want ook als $\cos(15\pi t+0{,}35)\approx -1$ hebben de slingeringen van het hoogfrequente signaal een maximale amplitude.

Zwevingen bij ongelijke amplitudes

Wanneer de amplitude van $f_2(t)$ niet gelijk is aan die van $f_1(t)$, krijgen we ook zwevingen, maar de fluctuaties zijn dan minder sterk. Figuur 4 laat er een voorbeeld van zien. Hierbij is $f_2(t)=2\cos(850\pi t-0{,}7)$ genomen. De amplitude van $f_2(t)$ is dus van 3 naar 2 gedaald. Als gevolg hiervan wordt het 'nulniveau' niet meer gehaald: de signalen kunnen elkaar niet meer volledig uitdoven.
Voor een analytische beschrijving is het 't handigste om $f_1(t)$ te splitsen als $f_1(t)=\cos(880\pi t)+2\cos(880\pi t)$. Dan is

$$f_1(t)+f_2(t)=\cos(880\pi t)+4\cos(15\pi t+0{,}35)\cos(865\pi t+0{,}35)$$

De eerste term heeft een relatief kleine amplitude en is dus van ondergeschikt belang; de tweede term is verantwoordelijk voor de zwevingen. Weer zijn het er vijftien per seconde.

Projecten en werkstukken

Wat voor hoorbare, storend klinkende zwevingen bepalend is, is hiermee duidelijk geworden: twee tegelijkertijd klinkende tonen (of boventonen) met frequenties die dicht bij elkaar liggen en die beide een voldoende grote amplitude hebben. Er is natuurlijk nog veel meer over te vertellen, maar het is leuker om er zelf ook mee te experimenteren. Zo kun je het hierboven besprokene met twee stemvorken van 440 Hertz controleren als je de benen van een van de beide stemvorken met gewichtjes verzwaart, waardoor de toon ervan verlaagd wordt.
Ook met muziekinstrumenten zijn er op dit gebied tal van experimenten mogelijk. In *De juiste toon* staan resonantieproeven beschreven die je met een piano of met andere instrumenten kunt uitvoeren waarbij zwevingen duidelijk hoorbaar worden. Leuk voor een gezamenlijk project met natuurkunde, vooral als je daarbij beschikt over toongeneratoren en apparatuur waarmee je ook daadwerkelijk fourieranalyse kunt uitvoeren. De bekende experimenteeromgeving Coach, die ontwikkeld is door het Amstel-instituut van de Universiteit van Amsterdam en die op veel scholen aanwezig is, is daar een voorbeeld van.

Literatuur

Jan van de Craats: De juiste toon, Epsilon Uitgaven, Utrecht, 2003, Zebra-reeks nr. 15, isbn 90-5041-079-0.
Hermann L.F. Helmholtz: On the Sensations of Tone (Engelse vertaling en bewerking (1885) door Alexander J. Ellis van 'Die Lehre von den Tonempfindungen', Heidelberg, 1862, 1877), heruitgave Dover, New York, 1954, isbn 04-8660-753-4.

Over de auteur

Prof.dr. J. van de Craats (e-mailadres: J.vd.Craats@mindef.nl) is hoogleraar wiskunde aan de Koninklijke Militaire Academie in Breda, de Universiteit van Amsterdam en de Open Universiteit.

WISKUNDE EN ISLAMITISCHE KUNST: WERK IN UITVOERING

[Jan Hogendijk]

Inleiding

De Islamitische traditie verbiedt het afbeelden van levende wezens.[1] Om moskeeën en andere gebouwen te versieren werden in de Islamitische wereld Arabische kalligrafie en abstracte wiskundige kunst gebruikt. Overal in de middeleeuws Islamitische wereld zijn prachtige bouwwerken neergezet met schitterende mozaïeken. Iedereen kent het Alhambra in Granada, waar M.C. Escher inspiratie heeft opgedaan. De versieringen in het Alhambra berusten op achthoeken en twaalfhoeken, en zijn ‘slechts’ kinderspel vergeleken met wat bewaard is in het paradijs voor mozaïekliefhebbers, Iran. Daar vinden we ook patronen gebaseerd op de vijfhoek (gulden snede), en min of meer regelmatige vlakvullingen op koepels (gekromde oppervlakken). De belangrijkste mozaïeksteden in Iran zijn in de eerste plaats Isfahan, daarnaast ook Natanz, Kashan, Shiraz, Qom en Mahan (zie figuur 1). De meeste van deze steden zijn tegenwoordig gemakkelijk bereikbaar: een duizelingwekkend reisdoel voor de echte mozaïekliefhebber.

Hoe en waarom?

Wie deze middeleeuwse schoonheid heeft gezien, zal zich wellicht afvragen hoe de mozaïeken zijn geconstrueerd, en of er een symbolische betekenis achter zit. Deze vragen zijn niet eenvoudig te beantwoorden. In bibliotheken in Iran en daarbuiten zijn veel middeleeuwse Arabische en Perzische handschriften over wiskunde bewaard. In deze handschriften staat (voor zover bekend) praktisch nooit iets over toepassingen in de architectuur en kunst. Er zijn slechts twee handschriften bekend die wel over wiskunde en architectuur gaan: een 16e-eeuwse rol met werktekeningen in het Topkapi-paleis te Istanbul[2] en één middeleeuws Perzisch manuscript met 40 bladzijden werktekeningen met instructies.[3]

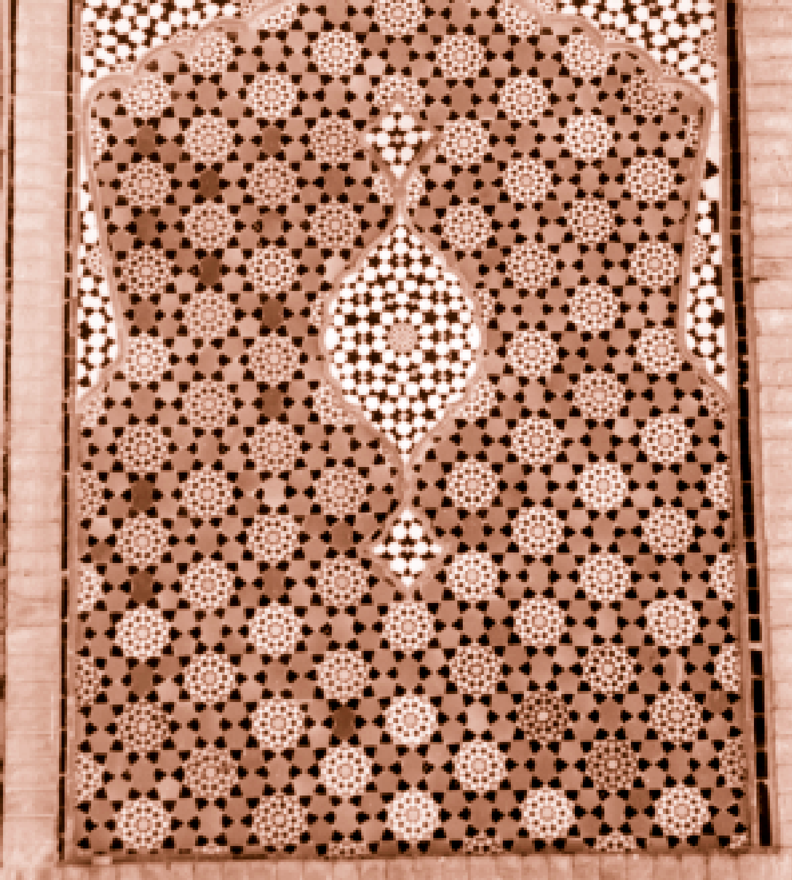
Constructie van mozaïeken

In Shiraz heb ik een atelier bezocht waar nog mozaïeken volgens oude patronen werden gemaakt. De kennis over de precieze wiskundige constructie van mozaïeken schijnt vooral mondeling te zijn overgedragen, van vader op zoon, of binnen soefi-ordes[4], die enigszins te vergelijken zijn met de gilden in middeleeuws Europa. In Iran zijn enkele auteurs bezig met het vastleggen van kennis over mozaïeken, bijvoorbeeld Prof. Sharafuddin uit Bandar Abbas, die aan een boek werkt met de titel ‘De Meetkunde van het Hart’. Ook is er een prachtig plaatwerk in (minstens) vijf delen, met uitleg over patronen, meetkundige constructies, en alle gereedschappen: Mohammad Māheru’l-naqsh, *Kāshī-Kārī-ye īrānī*, Tehran (1361).[5]

Deze boeken zijn in het Westen moeilijk of niet te krijgen en natuurlijk alleen toegankelijk voor wie Perzisch kan lezen. In elk geval zijn veel van de wiskundige achtergronden van de Islamitische mozaïekkunst waarschijnlijk wel te achterhalen voor iemand die goed Perzisch kent en enige tijd in Iran rondreist.

Symbolische betekenis

De symbolische achtergrond van de mozaïekkunst is een groter raadsel. In het Westen zijn theorieën gepubliceerd, bijvoorbeeld door Seyyed Hossein Nasr en zijn leerlingen, over het verband tussen Islamitische mozaïeken en archetypen, planeten, en magische vierkanten.[6] Nasr en zijn leerlingen onderbouwen hun



FIGUUR 1 Een mozaïek uit Isfahan



FIGUUR 2 Koepel van het graf van Shah Nematollah Vali, Mahan

theorieën niet met authentieke bronnen (zoals bijvoorbeeld interviews met mozaïekmakers), en ze gebruiken soms denkbeelden die aan de middeleeuwse mozaïekmakers niet bekend waren. Ik heb daarom het sterke vermoeden dat de theorieën onjuist zijn. Misschien was er helemaal geen symbolische of filosofische achtergrond, en construeerden de mozaïekmakers gewoon wat zij mooi vonden zonder diepere boodschap. Misschien was deze achtergrond er wel, en moeten we die weer in het soefisme zoeken. Ook op dit gebied is er een gigantische literatuur in Perzische en Arabische handschriften die in het Westen nog nooit zijn onderzocht.

Al-Kāshī over koepels

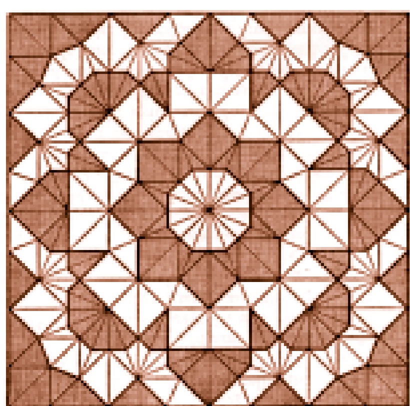
Van enkele andere gebieden in de Islamitische wiskundige kunst wordt de sluier een beetje opgelicht, door wat de Perzische wiskundige Al-Kāshī (ca. 1420) geschreven heeft in zijn boek *'Sleutel tot de Rekenkunde'*. Deze gegevens worden nu uitgewerkt door een team onder leiding van Dr. Yvonne Dold-Samplonius te Heidelberg.
Al-Kāshī beschrijft hoe koepels op Islamitische bouwwerken en graftombes moeten worden geconstrueerd, en hoe je de oppervlakte daarvan kunt uitrekenen. Yvonne Dold heeft in een (Engelstalige) video deze constructies met bestaande bouwwerken vergeleken. Het graf van Al-Kāshī is verloren gegaan en er zijn heel weinig gegevens over bekend. In de video wordt een virtuele graftombe voor Al-Kāshī geconstrueerd op grond van de aanwijzingen over de bouw van koepels in zijn werk. Het stadsbestuur van zijn geboortestad Al-Kāshān was zo ontroerd door de video dat mevrouw Dold tot ereburgeres van de stad is uitgeroepen.

Muqarnas

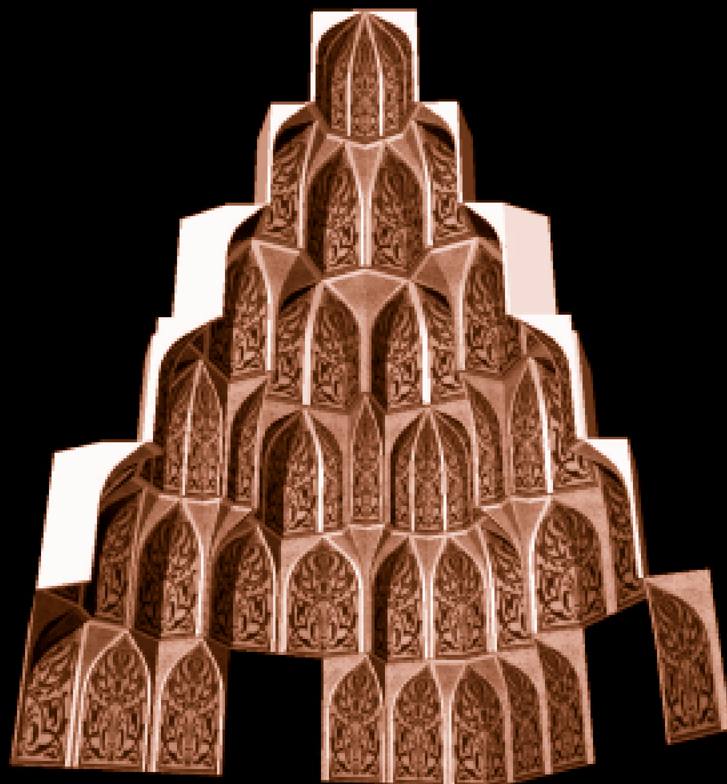
Om de ronde koepels op rechte muren te laten aansluiten is vanaf de tiende eeuw een speciaal soort versiering ontwikkeld, de *muqarnas*. Het bestaat uit een drie-dimensionaal samenstel van allerlei beschilderde oppervlakjes dat een beetje doet denken aan stalactieten in een grot. Dit wordt tegen koepel en muur aan gemetseld om de overgang geleidelijk te maken. De muqarnas werd opgebouwd aan de hand van een horizontale werktekening, waarin de projecties van de vlakjes werden aangegeven. Al-Kāshī schrijft over verschillende soorten muqarnas en hij geeft benaderingsformules voor de oppervlakte van de vlakjes, nodig om de schilder te kunnen betalen. (Als de benadering te hoog was, was dit voor de schilder voordelig!) Zie de figuren 3 en 4.
Op dit moment werkt Silvia Harmsen (in Utrecht afgestudeerd als wiskundige) in Heidelberg aan een project om uit de horizontale projectietekening de muqarnas te reconstrueren. Dit is belangrijk om zo'n constructie te kunnen repareren of restaureren als hij is ingestort, en om de werktekeningen in de rol in het Topkapipaleis te kunnen begrijpen. Binnenkort verschijnt ook een video hierover: 'Magic of Muqarnas'.

Leerlingen

In principe is Islamitische wiskunst een leuk onderwerp voor leerlingen om een profielwerkstuk over te schrijven. Echter, het is wel handig als de leerling en de begeleider allebei Perzisch kunnen lezen en goede contacten met Iran hebben!



FIGUUR 3 Horizontale projectie van een muqarnas[7]



FIGUUR 4 Reconstructie van de muqarnas die bij de horizontale projectie hoort[7]

Noten

[1] De Profeet Mohammad zou volgens de traditie gezegd hebben: 'Degene die een afbeelding maakt in deze wereld, zal gevraagd worden om er leven in te blazen op de Dag des Oordeels.'
[2] Een leerlingenpakketje hierover is gemaakt door Mattias Visser (e-mailadres: mattiasvisser@zonnet.nl).
[3] Voor een kleine greep daaruit zie J.P. Hogendijk: Een workshop over Iraanse mozaieken. In: Nieuwe Wiskrant 16 no. 2 (1996), pp. 38-42.
[4] Het soefisme is een mystieke stroming in de Islam, met veel nadruk op dichtkunst en op de ontwikkeling van het gevoel.
[5] Het jaar wordt in de Perzische jaartelling aangegeven. Het jaar 1 hiervan begint in het voorjaar van 622 volgens onze jaartelling, het jaar van de verhuizing van de profeet Mohammad van Mekka naar Medina. Het Perzische jaar is een zonnejaar dat begint met het astronomische begin van de lente in maart.
[6] Zie bijvoorbeeld Keith Critchlow: Islamic Patterns, An Analytical and Cosmological Approach (London, 1999).
[7] De figuren 3 en 4 zijn gereproduceerd met dank aan het Interdisciplinary Center for Scientific Computing van de Universiteit van Heidelberg.
Figuur 3 is afkomstig uit het boek van Harb.

Literatuur, e.d.

Mozaïeken
G. Necipoğu: The Topkapi Scroll / Geometry and Ornament in Islamic Architecture, Getty Center for the History of Art and the Humanities (Santa Monica, Ca., 1995).

Koepels
Yvonne Dold-Samplonius: Video Qubba for Al-Kāshī; te bestellen via www.ams.org/bookstore/videos
Zie ook Yvonne Dold-Samplonius: Calculating Surface Areas and Volumes in Islamic Architecture. In J.P. Hogendijk, A.I. Sabra (ed.): The Enterprise of Science in Islam, New Perspectives (Cambridge Mass., 2003), pp. 235-265.

Muqarnas
Yvonne Dold-Samplonius: 'Practical Arabic Mathematics / Measuring the Muqarnas by Al-Kāshī'. In: Centaurus 35 (1993), pp. 193-242.

Ulrich Harb: Ilkhandische Stalaktitengewölbe (Berlin 1978).

Website
www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/ngg/Muqarnas/

Over de auteur

Jan Hogendijk (e-mailadres: hogend@math.uu.nl) heeft wiskunde en Arabisch gestudeerd in Utrecht. Hij werkt aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht, en doet onderzoek in de geschiedenis van de wiskunde en sterrenkunde. Hij heeft diverse middeleeuws Arabische handschriften uitgegeven en vertaald, en reist regelmatig naar het Midden-Oosten.

COMPUTER VEROORZAAKT REVOLUTIE IN DE BEELDHOUWKUNST

De objecten op de omslagen van deze jaargang van Euclides werden ontworpen door beeldend kunstenaar en wiskundige Rinus Roelofs. Redacteur Klaske Blom sprak met hem.

[Klaske Blom]



Revoluties in de kunst

'Er is op dit moment een revolutie gaande in de beeldhouwkunst en ik ben ontzettend blij dat ik dit spannende tijdperk in de kunstgeschiedenis mee maak. Het is immers niet elke generatie gegeven om zich midden in een periode van grote veranderingen te bevinden.

In de schilderkunst was er bijvoorbeeld sprake van een revolutie toen het perspectieftekenen zijn intrede deed. Leonardo da Vinci was een van de eersten die deze techniek in zijn werk toepaste; hij was ook in staat te tekenen in vogelperspectief terwijl hij nog nooit gevlogen had... Het aanbrengen van perspectief in schilderijen ontketende een revolutie in de schilderkunst zoals de komst van de fotografie jaren later ook zou doen. Het dwong kunstenaars na te denken over hun vak: een goed lijkend portret schilderen is niet meer interessant op het moment dat foto's hun intrede doen in de kunst. Het dwong schilders iets anders te gaan doen en nieuwe stappen te zetten. Hiermee kwam de abstracte kunst tot ontwikkeling en bloei.

De huidige revolutie in de beeldhouwkunst is op gang gekomen door het gebruik van de computer bij het ontwerpen van beeldhouwwerken: er is software, zoals het programma Rhinoceros, waarmee je 3D-ontwerpen kunt maken die door een speciale printer driedimensionaal 'uitgeprint' worden (zie figuur 1). Je stuurt je file met je ontwerptekening op naar een goed geoutilleerd printbedrijf en je krijgt per omgaande een echt driedimensionaal model van je kunstwerk in kunststof retour. Aan jou als kunstenaar de taak om tenslotte je eindproduct vorm te geven in het materiaal van je keuze.'

Als je het zo beschrijft lijkt het alsof de computer nieuw gereedschap aanreikt: het schetsen wordt programmeren, en het beitelen wordt printen. Wat is daar zo revolutionair aan?

'De winst van de computer is gelegen in de ruimte die ontstaat voor denkkracht, voor al je denkmogelijkheden: als beeldhouwer voel ik mij beperkt door mijn eigen onhandigheid; het materiaal waar je mee kunt werken is zo divers dat je je nooit in alle bewerkingstechnieken goed kunt bekwamen. Dat betekent dat je in de uitvoeringsfase altijd heel veel inlevert op je idee, je bedenksels zijn altijd rijker dan wat je kunt maken. Met de computer wordt al het denkbare maakbaar. De grens van onze mogelijkheden wordt opgerekt; ik hoef mezelf niet meer in te houden maar kan de vrijheid nemen om alle kanten op te denken. En sommige beeldhouwers zijn denkers: een beeld ontstaat in mijn hoofd en dus kunnen m'n beelden zo veel rijker worden doordat ik me niet laat inperken door de uitvoeringsfase.'

Vind je het geen enge, afhankelijk makende ontwikkeling?

'Eng? Nee, ik ben juist heel blij dit allemaal mee te maken. Het is een enorm spannende tijd.

Ik ken de, bij een revolutie behorende, behoudende reacties: er zijn mensen die vinden dat je het materiaal moet kunnen ruiken en voelen; ik ben juist opgelucht dat ik niet meer dagenlang in stofluchten hoef door te brengen. Er zijn ook mensen die vinden dat je zelf je eigen ontwerp en maquettes moet kunnen maken omdat anders iedereen 'het' zou kunnen. Deze ontwikkeling noodzaakt mij juist om mijn kunstenaarschap te bewijzen, te ontwikkelen en weer goed te worden met nieuwe middelen. Helaas wordt deze ontwikkeling op de kunstacademies genegeerd, een vorm van conservatisme in mijn ogen. De huidige generatie kunstenaars die afstudeert is daardoor bijzonder slecht op de hoogte van de nieuwste technieken en mist de boot als het gaat om ontwikkelingen in de beeldhouwkunst op dit terrein.

Het is niet eenvoudig je midden in een revolutie te bevinden; mensen zijn op zoek naar nieuwe vormen en weten niet waar het uitkomt. Het oude wordt nog niet losgelaten en het nieuwe is er nog niet. Dit bleek bijvoorbeeld tijdens een symposium in Parijs waar kunstenaars zich presenteerden in een virtueel beeldenpark; het meeste werk was verrassend behoudend, gemaakt van ogenschijnlijk 'echt' materiaal en in 'oude' vormen. Maar de vragen zijn: Waar gaat het naar toe? Wat zijn de nieuwe ijkpunten? Hoe weet je wat je wilt? Niet eng, maar geweldig om mee te maken!'

Biografie

Rinus Roelofs (geboren 13 juni 1954 in Sleen) groeide op in een tijd waarin de gangbare opvatting was dat je moest gaan studeren als je daarvoor de mogelijkheden had; het zou 'onverstandig' zijn om dat niet te doen. Roelofs beschikte over de mogelijkheden, hij was bijvoorbeeld drie jaar lang winnaar van de schoolschaakcompetitie, en koos voor een studie toegepaste wiskunde aan de Technische Universiteit Twente in plaats van een opleiding aan een kunstacademie. Na 5 jaar studeren verliet hij echter zonder diploma de TU en ging alsnog naar de kunstacademie; het kan verkeren...

Tijdens zijn studie wiskunde was hij zich steeds meer gaan bezig houden met filosofie en ontwikkelde hij, tot zijn eigen verrassing, een voorkeur voor zuivere wiskunde vakken als mathematische logica en algebraïsche structuren. Toen hij startte met zijn studie ervoer hij juist een groot gevoel van vrijheid door in een toepassingsgerichte richting te werken omdat hij het gevoel had, het heft in eigen handen te kunnen houden in onze technisch georiënteerde maatschappij. Maar tegen het einde van zijn studie realiseerde hij zich dat hij geen toekomst voor zichzelf zag binnen de wiskunde: een onderzoeksplaats was slechts voor enkelingen weggelegd, voor het onderwijs en het bedrijfsleven had hij geen ambitie (meer). Noch in de technische, noch in de zuivere wiskunde zag hij zichzelf verder groeien. Vandaar dat Rinus alsnog besloot naar de kunstacademie te gaan.

Daar begon hij met modeltekenen, werkte met verf en krijt en deed veel aan fotografie. Hij interesseerde zich vooral voor conceptuele kunst en liet zich inspireren door kunstenaars als Struijken, Jan Dibbets en Siurdur Gudmunssen, van wie hij ook les kreeg. Deze

conceptuele kunstperiode zou invloedrijk blijken te zijn op zijn latere werk: al zijn kunstwerken zijn begonnen met een idee, niet met een gevoel of emotie; dit idee moet optimaal ten uitvoer gebracht zodat het daadwerkelijk overkomt bij de beschouwer.
Na de kunstacademie zocht hij toch weer, bijna ondanks zichzelf, de wiskunde op: hij accepteerde met moeite dat hij de drang voelde om de structuurmatige, de Escherachtige kant op te gaan. In die tijd, begin jaren '80, was Escher niet geliefd in de kunstwereld, en Roelofs vermoedde dat hij door zijn vakbroeders niet meer serieus genomen zou worden als hij dit spoor zou volgen. Dit voorgevoel bleek intuïtief sterk. Hij kreeg wel erkenning en goedbetaalde opdrachten vanuit het bedrijfsleven, waardoor hij in zijn keus om wiskundig werk te maken gesterkt werd. De zoektocht naar zijn eigen weg was begonnen.

Structuur en dualiteit

Kun je beschrijven hoe je wiskundige scholing en achtergrond je van pas komen in je beeldhouwwerk?
'Ik hecht een groot belang aan de begrippen structuur en dualiteit. Deze twee begrippen spelen een belangrijke rol in mijn beeldend denken, en dat denken, daar gaat het om. Vaak wordt er gediscussieerd over de vraag of bijvoorbeeld Escher en Da Vinci wiskundigen waren. Escher vond zichzelf geen wiskundige; van Da Vinci daarentegen is de uitspraak: "Alleen zij die wiskundigen zijn, mogen mijn werk bekijken." Maar deze discussie over het al dan niet wiskundige zijn, is irrelevant. Het gaat erom, of iemand wiskundig denkt. De kern van wiskundig denken is dat je in staat bent om vanuit verschillende perspectieven naar een probleem te kijken en het te onderzoeken. Vaak biedt een nieuw gezichtspunt nieuwe openingen en daarmee nieuwe kansen tot vernieuwing. Dualiteit speelt dan een belangrijke rol: overgaan vanuit het ene perspectief naar het andere: spiegelen, tegenstellingen zoeken, wisselen van voor-achtergrond. Dit overstappen van de ene toestand naar de andere maakt dat je nieuwe ontdekkingen doet en dat je je ontwikkelt in je werk.'

Is dat niet een veel algemener kijkprincipe?
'Dat zou goed kunnen, maar wiskundigen zijn getraind in het denken vanuit structuren. En ze zijn in staat om een probleem ook eens van een andere kant te benaderen. Denk maar aan het algebraïsch bewijzen van meetkundige problemen. Dualiteit komt naar voren als ik grafentheorie gebruik bij het werken met veelvlakken: via punten en lijnen kom ik iets te weten over de mogelijkheden van de vlakken; in het werken met koepels concentreer ik me op de voegen in plaats van op de tegels om de constructies te verbeteren. Als je het dualiteitsprincipe integreert in je denken kun je interessante denkstappen maken.'

En kun je een voorbeeld noemen van een typisch wiskundig moment in het creatieve proces dat leidt tot een nieuw kunstwerk?
'Soms is een topologische studie noodzakelijk om vragen die ik mezelf stel, te kunnen beantwoorden. Om een voorbeeld te noemen: als je een torus plat op een tafel hebt liggen en je snijdt deze horizontaal door, ontstaan er in het snijvlak twee cirkels, de ene binnen de andere. Als je de torus verticaal doorsnijdt (door zijn 'middelpunt') bestaat het snijvlak uit twee naast elkaar liggende cirkels. Als je van de ene toestand (snijvlak) naar de andere wilt, is er dus ergens een 'spannend' moment, daar waar de cirkels van binnen elkaar liggend overgaan naar naast elkaar liggend. Waar vindt dat moment plaats? Als je in beweging denkt: welke snijvlakvormen kom je onderweg tegen? Dit soort vragen inspireren me weer tot nieuwe werken. Het opwerpen van dergelijke vragen en problemen vind ik typisch voor wiskundigen, en het is ook typisch voor kunstenaars; hierin zijn ze verbonden: altijd weer op zoek naar een nieuw idee of een nieuw probleem, louter vanwege het plezier van het oplossen. Dit zoeken van problemen heeft meestal nauwelijks enige direct zichtbare maatschappelijke relevantie, in ieder geval niet noodzakelijke relevantie. Het gaat om het nieuwe, het verrassende en het leuke wat het je brengt.'

Ideeën

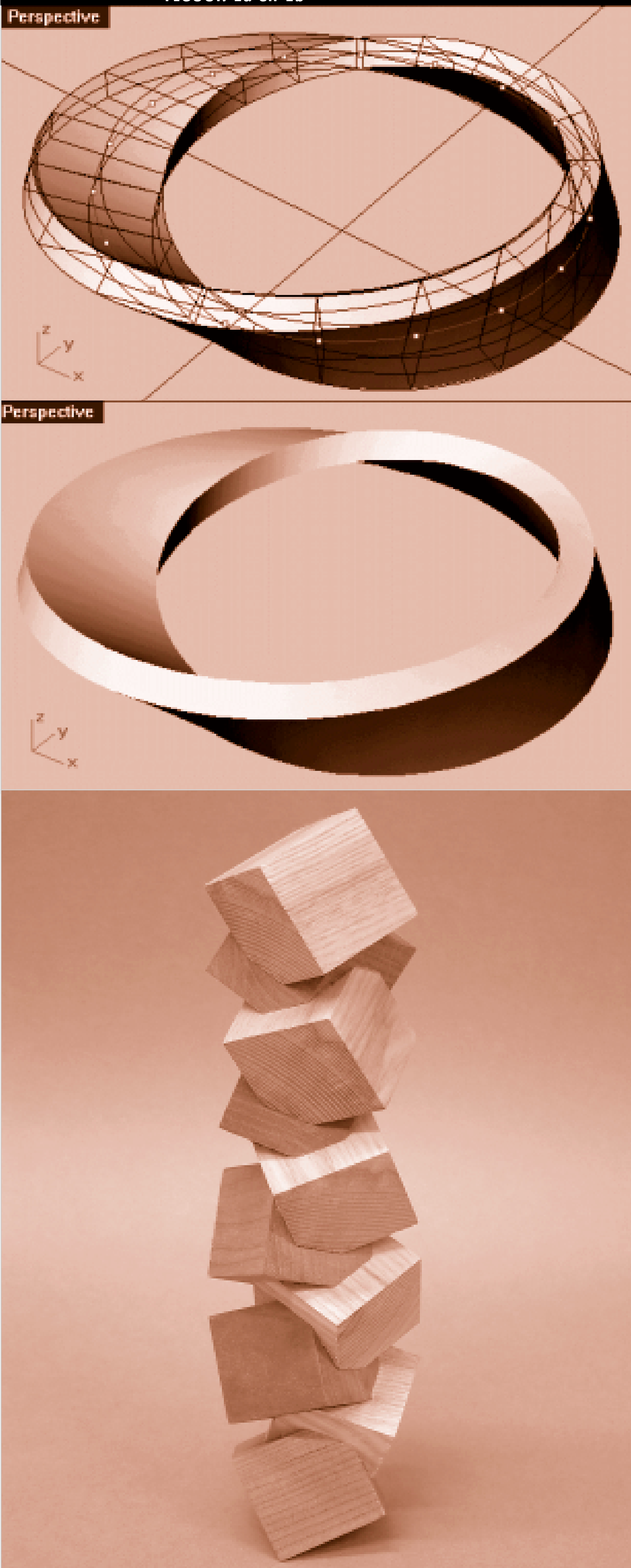
Zo zijn we weer terug bij Rinus' fascinatie met conceptuele kunst: het gaat om het idee. Over de ontwikkeling van die ideeën vertelde hij nog het volgende.

'Ideeën ontwikkel je door te spelen, bijvoorbeeld door te spelen met de mogelijkheden van de computer, door sensatiebelust te zijn en door te kijken naar wat er gebeurt als je je gedachten de vrije loop laat en probeert deze vorm te geven. Het computerwerk is het schetsstadium; het moment waarop je besluit over te gaan op echt materiaal en uit de virtuele wereld te stappen hangt af van een gevoel van fascinatie over dat het 'goed' is, dat er sprake is van spanning. Kunstenaars laten hun schetsboeken na als een tastbaar bewijs van hun emotionele momenten; daarin vind je de basale ideeën en gedachten. Wil je echt een kunstenaar doorgronden dan moet je je laten binnenvoeren in het verhaal dat hij optekent in zijn schetsboek. En dat schetsboek kan bestaan uit geprinte computerschermen, dat doet aan de essentie niets af. Dit tastbare bewijs van de weg waarlangs de idee tot stand komt, ontberen we ten enenmale bij wiskundigen: bij de bestudering van een wiskundige theorie heb je slechts het wiskundig materiaal dat voor je ligt. Over het proces waarlangs de wiskundige gewerkt heeft om tot die theorie te komen is vrijwel nooit iets bekend. Wat heeft iemand bewogen, waardoor heeft hij voor een bepaald spoor gekozen, waar zat de begeestering, wanneer kwamen de teleurstelling en de doodlopende wegen? Waar ontstond de fascinatie met het probleem? Kunstenaars en wiskundigen onderscheiden zich in het achterlaten van bruikbaar materiaal voor nieuwsgierige latere generaties.'

Meetkunde

Rinus' eigen werk bestaat uit geometrische objecten. Het kan ook anders met de computer, maar dit

FIGUUR 1a en 1b



FIGUUR 2

meetkundige werk past bij hem. Het biedt de structuur waarnaar hij op zoek is en waarop hij gesteld is. Hij is ervan overtuigd dat elk mens voortdurend pogingen doet om zichzelf te snappen en dingen met elkaar in verband te brengen. Die verbanden kom je bijvoorbeeld op het spoor door over te schakelen van statische beelden op bewegingen en bewegende beelden. Eén van zijn laatste werken, *'Spiraliserende kubussen'* (zie figuur 2), is hiervan een mooie illustratie.

Ik leg Rinus tot slot het volgende voor:
Ik vind geometrische kunst soms zo saai dat het me helemaal niet raakt.
Zijn reactie is even onthutsend als nuchter:
'Het is van alle tijden dat er slechte kunst gemaakt wordt, dus gebeurt dat ook op dit gebied. Vraag je bij kunst niet af of het mooi is, maar of het boeit, of het je iets doet, of het een sensatie teweeg brengt. Daar gaat het om.'

Aan het eind van het interview blijkt dat we meer over zijn ideeën dan over zijn werk gesproken hebben. Hoewel Roelofs zijn werk maakt om een idee voor het voetlicht te brengen, ben ik blij dat we ook nog woorden hebben om ons uit te drukken. Onder de indruk van zijn werk was ik al; zijn gedachten blijken me handvatten te bieden om weer vanuit nieuwe perspectieven te kijken, zowel naar kunst als naar de kunstgeschiedenis.
Zijn werk kunt u overigens zelf bekijken: niet alleen op de voorkanten van deze lopende jaargang van Euclides, maar ook via een selectie uit zijn collectie op zijn website (*www.rinusroelofs.nl*).

Over de auteur

Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) werkt als wiskundedocente op het Hooghe Landt in Amersfoort.



WISKUNDIGE POËZIE

[Marjolein Kool]

Marjolein Kool publiceerde enkele bundels met pleziergedichten, waaronder (samen met Drs. P) *'Wis- en natuurlyriek'*, met gedichten over de exacte vakken[1].
Speciaal voor dit themanummer schreef zij drie nieuwe wiskundegedichten: 'Schaakprobleem', 'Vakantiedieet' en 'Regelmaat'.

Vakantiedieet

Daar ijs en wijntjes tot mijn spijt
mijn taille niet versmallen,
ben ik in de vakantietijd
ruim min drie kilo afgevallen.

Schaakprobleem

Nadat hij zijn leven en alles wat telde
al jaren in dienst van de wiskunde stelde,
trof Cupido's pijl in een loodrechte lijn
zijn hart bij de aanblik van Rozemarijn.
Haar schoonheid, haar gratie, haar pracht ongemeten,
ze deden hem spoedig zijn hoeken vergeten.
Hij staarde nu slechts naar de curven van haar.
Haar vader verstopte haar in haar boudoir
en dacht op die wijze haar minnaar te stuiten.
Die gooide een kiezeltje tegen haar ruiten.
Zij schoof haar gordijn, kreeg haar lief in het oog.
Hij klom langs een ladder verlangend omhoog,
forceerde haar raam, droeg haar snel naar beneden,
waar zij in de bosjes een spelletje deden.
De volgende avond, hoe mooi kan het zijn,
wierp hij weer zijn steentje, schoof zij haar gordijn,
nam hij haar weer mee als een kostbaar juweeltje
en zo werd dit spoedig een vast ritueeltje.
Tot pa hen betrapte. Hun noodlot was groot
toen hij haar vertoornd in de wijnkelder sloot.
Een heel nieuw probleem op het pad van hun levens
met veel onbekenden en weinig gegevens.
De held liet er al zijn technieken op los.
Hoe kreeg hij haar ooit weer terug in het bos?
Na uren vergeefs in- en extrapoleren
besloot hij de wijnkelderdeur te forceren.
Toen bracht hij zijn lief naar de ladder alwaar
hij haar snel omhoog droeg tot in haar boudoir.
Daarna klom hij zonder zijn schat naar beneden.
En onder haar raam riep hij zichtbaar tevreden:
'Ik heb nu dit vraagstuk geheel in mijn macht.
Daar 't tot een bekend probleem t'rug is gebracht!

Regelmaat

Een levenslustig elfvlak
stond vrolijk en gedreven
in een, zoals hij zelf sprak,
onregelmatig leven.

Zijn leven was een blijspel
vol slempen, brassen, spillen,
totdat men vond dat hij wel
meer regelmaat moest willen.

Een twaalfde vlak, zo riep men,
zou zijn genotzucht stelpen.
Men wachtte tot hij sliep en
een hoefsmid hem ging helpen

Een schreeuw die door 't gewelf brak.
Een moker daalde neder.
Ons levenslustig elfvlak
is nu dodecaëder.

Noot

[1] 'Wis- en natuurlyriek / Met chemisch supplement' door Drs. P & Marjolein Kool verscheen in 2000 bij uitgeverij Nijgh & Van Ditmar (Amsterdam); isbn 90 388 14011.

Over de auteur

Marjolein Kool (e-mailadres: m.j.h.kool@domstad.nl) promoveerde op een proefschrift over Nederlandstalige rekenboeken uit de vijftiende en zestiende eeuw. Ze doceerde een aantal jaren wiskunde in het middelbaar onderwijs, maar is nu al weer geruime tijd docent Rekenen-Wiskundedidactiek aan de Pabo Hogeschool Domstad in Utrecht. Daarnaast is ze hoofdredacteur van het tijdschrift Willem Bartjens voor reken-wiskundeonderwijs op de basisschool.

WERELDWIJD NETWERK VAN WISKUNSTIGE KUNSTENAARS EN KUNSTIGE WISKUNDIGEN

Verslag van een congres over Wiskunde en Kunst in Granada van 23 t/m 25 juli 2003, georganiseerd door ISAMA – BRIDGES 2003

[Klaske Blom]

Inleiding

Wat deed u in de zomer van 2003? Herinnert u zich nog de hittegolf? In dit winters themanummer doe ik u verslag van een warme ervaring: ik combineerde mijn vakantie in de zomer van 2003 met deelname aan een congres over Wiskunde en Kunst. Het was verrassend en de moeite waard! Als u uw vakantiebestemming graag van het toeval laat afhangen en u geïnteresseerd bent in kunst, kan ik u aanraden om dit jaarlijkse congres[1] (in 2004 in Argentinië) uw doel te laten bepalen. En passant doet u er nog lesideeën op ook.

De deelnemers

Van over de hele wereld (o.a. uit de USA, Zuid-Afrika, Italië, Engeland, Duitsland, Nederland, Japan, Argentinië) reisden ongeveer honderd congresgangers naar Granada. Het belangrijkste doel was elkaar te spreken, te ontmoeten en elkaar deelgenoot te maken van de laatste ontwikkelingen op het gebied waar wiskunde, kunst en architectuur elkaar overlappen. Voor die deelnemers die elkaar tot nu toe alleen kenden via ieders website, was het een bijzondere ervaring elkaar in levenden lijve tegen te komen.
Drie dagen lang was er een vol programma van lezingen en presentaties. Regelmatig kreeg ik een vraag over de inhoud van mijn voordracht. Dat ik alleen maar kwam om te luisteren en te kijken en dat er een geheel nieuwe wereld voor me openging waaraan ik geen bijdrage kon leveren, was eerder uitzondering dan regel. De meeste deelnemers presenteerden zichzelf en/of hun werk. Ondanks de parallelsessies was er een strak georganiseerde, volle planning (overigens Spaans soepel in de uitvoering) van 's ochtends half tien tot 's middags half zeven. Na drie dagen liep ik over van indrukken.
De deelnemers waren grofweg in te delen zijn in vier categorieën:
- de kunstenaars (vaak ook wiskundig geschoold) die wiskundige modellen gebruiken om hun kunst vorm te geven;
- de wiskundigen die bestaande kunst van anderen analyseren;
- de architecten die vooral geïnteresseerd zijn in architectuur als kunstuiting, minder dan als functionaliteit, en vanuit hun eigen vakgebied kunst analyseren, en tenslotte
- de kunstenaars (niet-wiskundig geschoold) die 'wiskundige' kunst maken vanwege hun fascinatie met mathematische objecten.

Ik kom terug op deze indeling bij het beschrijven van (een fractie van) het programma, waarbij ik deelnemers van de tweede en derde categorie onder één noemer breng.

ISAMA/BRIDGES in Granada

Op woensdagochtend werden we zeer hartelijk welkom geheten door Nat Friedman, brein achter en oprichter van ISAMA. De sfeer was ontspannen en vrolijk, mensen verheugden zich in het weerzien en op alle inspirerende activiteiten. Vanuit de organisatie werd

het belang van ontmoetingen onderstreept, zodat er ruime aandacht in tijd en planning was voor de lunches en het avondprogramma. Aan het begin van het congres spraken we af dat het congres geslaagd zou zijn als iedereen met minstens één goed idee naar huis zou gaan.
Omdat het congres dit jaar in Granada gehouden werd, was het Alhambra (een schitterend paleis in Arabische bouwstijl, gebouwd tussen 1250 en 1350) een thema in veel lezingen. Misschien was het ook andersom: omdat het Alhambra en andere Islamitische kunst onderwerp van veel onderzoek is, werd het congres in Granada georganiseerd.
Eerlijk gezegd had ik nog nooit van deze internationale Wiskunde en Kunst congressen gehoord, ondanks het feit dat ze al jarenlang worden georganiseerd. In 1992 werd het eerste Wiskunde en Kunst congres (AM) gehouden, op initiatief van Nat Friedman in Albany (USA). Tot aan 1997 vonden daar jaarlijks dergelijke bijeenkomsten plaats. Vanaf 1998 werd de architectuur als aparte tak vertegenwoordigd, veranderde de naam in ISAMA en werd het met recht een wereldcongres dat wisselend in de USA en in Europa plaatsvond met deelnemers vanuit vrijwel alle continenten. Dit jaar werd het congres georganiseerd in samenwerking met BRIDGES[1], dat ook jaarlijks eigen congressen organiseert.

Het programma

Eigenlijk zou het voldoende zijn om u alle interessante websites door te geven, zodat u zelf uw kunst-congres-route kunt samenstellen. Kunst moet je vooral zelf bekijken en een congres zelf meemaken. Daarom beperk ik me tot een paar voorbeelden en wijs ik u graag op het grote aantal internetadressen (met de daarbij behorende doorklikmogelijkheden) aan het eind van dit artikel. Verder is er een prachtig dik boek verschenen met (samenvattingen van) de voordrachten die gehouden zijn tijdens het congres, een aanrader (zie [L1]).

I. Kunst ontworpen met wiskundige (computer)modellen

In de voordracht *Volution's Evolution* gaf Carlo Séquin (Berkeley)[10] een kijkje in zijn 'ontwerpkeuken'. Waarvandaan komt de inspiratie? Hoe krijgt een idee concreet vorm en hoe bepaal je wat 'de mooiste' uitwerking van het idee is? Als je op elk vlak van een kubus twee kwart cirkels tekent, de twee middelpunten in overstaande hoekpunten van het kubusvlak en de straal gelijk aan een halve ribbe, dan kun je acht verschillende patronen laten ontstaan. Als je vervolgens minimale oppervlaktes creëert tussen deze cirkelranden (gekromde oppervlakten, zadels, tunnels), dan heb je de basis voor prachtige beeldhouwwerken. Séquin liet ons enthousiast de ontstaansgeschiedenis zien van zijn werk, dat hij ontwerpt met het computer-programma Surface Evolver. Vele topologische beschouwingen leidden tot even zovele variaties in zijn werk. Voorbeelden hiervan kunt u vinden op de website van K. Brakke[2].

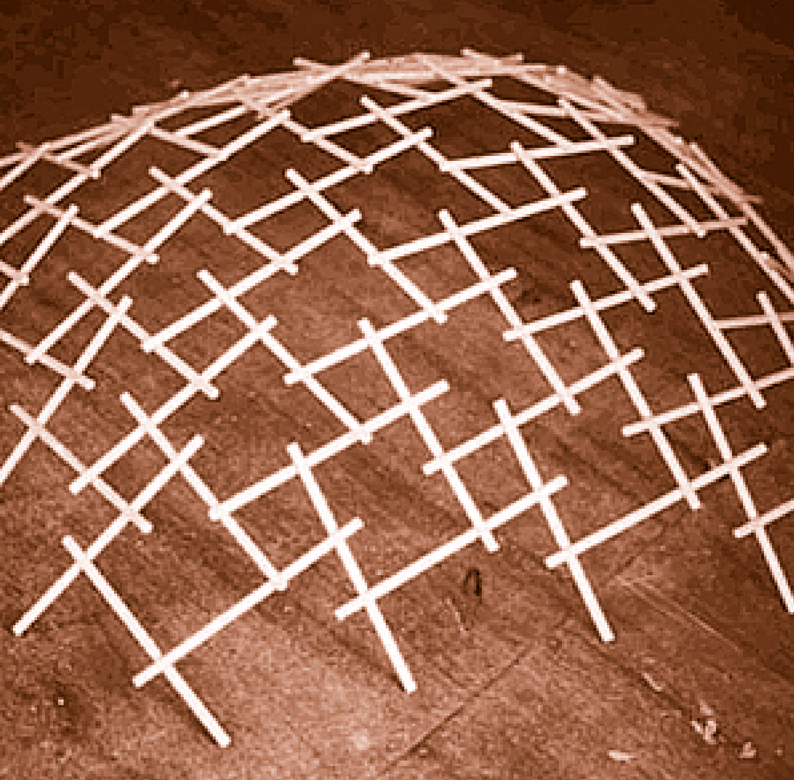
En passant vertelde Séquin nog dat hij groepen studenten had laten werken aan de volgende opdracht: maak van het tweedimensionale yin-yang-teken een driedimensionaal ontwerp. Misschien eens iets om zelf te proberen en vervolgens om te toveren tot een praktische opdracht?
Ook mooi was zijn ontwerp van een tot bol opgeblazen icosaëder met in elke punt waar drie driehoeken elkaar ontmoeten, drie vlinders die de 'bolheid' vergroten.

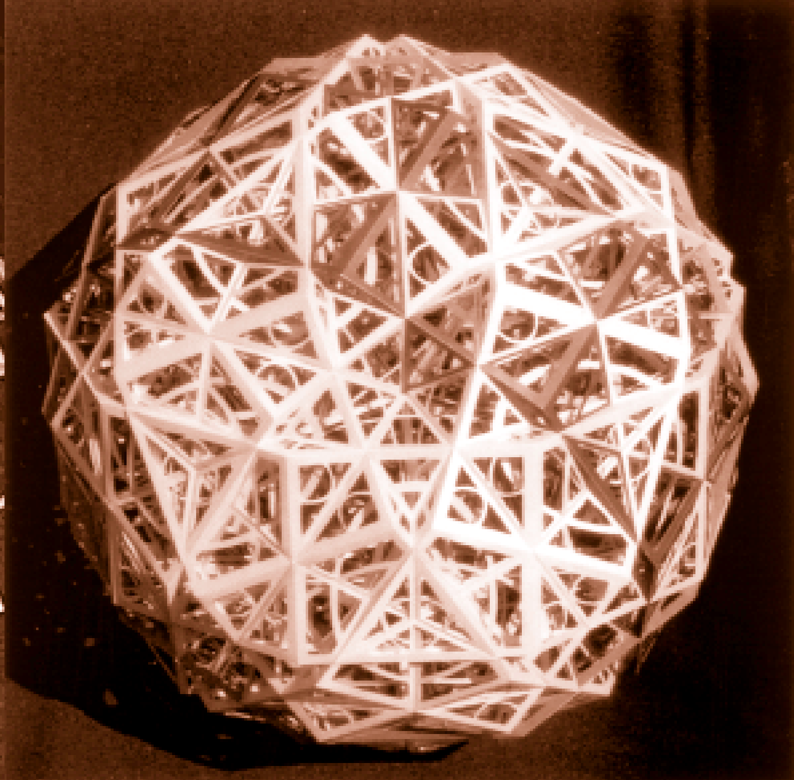
Eén van onze eigen kunstenaars, Rinus Roelofs, wiskundige en kunstenaar, was ook in Granada. Zijn voordracht ging over koepels die hij ontwerpt met louter rechte houtjes (boomstammen soms). Als verbindingen geen spijkers, geen lijm of touwtjes, alleen maar uitsparingen op de juiste plaatsen. Met dit eenvoudige systeem kun je koepels bouwen van diverse afmetingen, diverse krommingen en in verschillende patronen; zie figuur 1. Omdat het idee zo ingenieus en zo simpel is tegelijkertijd, vermoedde Roelofs dat hij niet de eerste en enige in de geschiedenis was met deze ontwerpwijze. Na een zoektocht vond hij inderdaad een 'oudere' kunstenaar: ook Leonardo da Vinci was bekend met dergelijke constructies; zie [L2]. Roelofs heeft deze constructie later gebruikt voor prachtige bolontwerpen. Met 24 of 90 ronde houtjes en uitsparingen op de juiste plaatsen zet hij 'bollen' in elkaar die uitermate stabiel blijken te zijn. Ik raad u dringend aan een bezoekje te brengen aan zijn website[3] en ook zijn overige werk te bewonderen. Zijn recentere werk ontwerpt Roelofs met behulp van het 3D-computerontwerpprogramma Rhinoceros. Ook hierover kunt u informatie vinden via zijn website.

II. Wiskundigen en architecten analyseren kunst

De mozaïeken en de plafondsculpturen (zie [L3]) van het Alhambra zijn in veel lezingen besproken. Een voordracht die grote indruk op mij maakte, was die van Jay Bonner, een Amerikaans architect die zich gespecialiseerd heeft in Islamitische bouwkunst. Hij onderscheidde in de mozaïeken drie verschillende typen gelijkvormige meetkundige patronen en liet onder meer zien met welke historische technieken deze gemaakt zijn. Ook hiervoor verwijs ik u weer graag naar zijn website[4] en een verwante site[5].
Een lesidee voor het werken met tegelmozaïeken in de klas, waarbij u de details nog zelf moet uitwerken, vindt u op pagina 148.

De wiskundige Paul Rosin uit Engeland raakte gefascineerd door een vloersculptuur in de Biblioteca Laurenziana in Florence. In zijn voordracht vertelde hij over zijn onderzoek naar de vergelijkingen waarmee de ellipsvormige schijven van deze vloersculptuur beschreven kunnen worden. Deze ellipsen zijn ingebed in een door cirkels gevormde rozet. De meetkunde bleek verrassend complex te zijn; voor de complexe patronen vond hij alleen numerieke oplossingen, voor simpeler vormen ook analytische.


FIGUUR 1


FIGUUR 2

Jay Kappraff (New Jersey Institute of Technology) vindt in oude Hindu en Islamitische kunst onverwachte verbanden in verhoudingen tussen de diagonaal en zijde van regelmatige veelhoeken. De diagonalen blijken de zijden te zijn van verschillende soorten van '*n*-puntige-sterren' die gerelateerd zijn aan de bijbehorende *n*-hoek. Het duizelde me na deze voordracht en ik weet ook niet of ik bovenstaande zin al dan niet met onzin geformuleerd heb. Kenners raadden me zijn boek aan; ik geef het u maar weer door (zie [L4]). De man zelf was in ieder geval fenomenaal in het wekken van de nieuwsgierigheid! Wat bijvoorbeeld te denken van deze Fibonacci-achtige rij die hij (voor mij onnavolgbaar) afleidde uit een regelmatige zevenhoek: 1, 1, 1, 2, 3, 5, 6, 11, 14, 25, 31, ... Als u de volgende termen niet kunt vinden, moet u toch zijn boek eens doorbladeren.

En dan was er nog een eerste aanzet om wiskundige beeldhouwkunst te classificeren, door Zalaya en Barrallo uit Spanje. Een dergelijke classificatie, in negen categorieën, is niet eerder gemaakt en volgens de initiatiefnemers wel nodig met het oog op verder onderwijs in wiskunde en kunst. De categorieën zijn: veelvlakken en klassieke meetkunde, niet-georiënteerde oppervlakken, topologische knopen, oppervlakken gegeven door kwadratische vergelijkingen of voortgebracht door rechte lijnen, symmetrische en modulaire structuren, Boole'se bewerkingen, minimaal-oppervlakken, transformaties en overige.

III Kunstenaars gefascineerd door meetkundige objecten

Irene Rousseau, Mary Williams, Benigna Chilla en Ulrich Mikloweit delen een passie voor meetkundige objecten. Niet professioneel wiskundig onderlegd maken zij hun kunstwerken door gebruik te maken van geometrische vormen. Mikloweit, een Duits scheikundige, raakte ooit geboeid door het verschijnsel veelvlakken doordat een hoogleraar wiskunde tijdens een college vertelde dat de diagonalen van de zijvlakken van een kubus twee elkaar snijdende tetraëders vormen. Omdat Mikloweits voorstellings-vermogen hiervoor tekort schoot, maakte hij een model. Dit was het begin van een langlopende carrière veelvlakken bouwen en inmiddels draait hij zijn hand niet meer om voor het bouwen van vijf elkaar doorsnijdende tetraëders, die hij dan ook nog zeer kunstig versierd heeft (zie figuur 2). Hij typeert zijn werk als '*polyart style*'; kenmerkend hiervoor is dat hij in zijn constructies de snijvlakken zichtbaar laat zijn. Verbijsterd was ik door het geduld en de precisie van de man; ik word al bijna driftig van voelbare frustratie als ik me indenk ooit zoiets te moeten maken. Mikloweit las in het boek van Magnus Wenninger, *Polyhedron Models*, dat er 75 uniforme veelvlakken te construeren zijn, de meeste niet-convex. Hij besloot ze allemaal te gaan maken en heeft er inmiddels 54 voltooid. Hij verwacht nog tien jaar nodig te hebben voor de overige vormen. Om een indruk te krijgen van deze papieren, fraai versierde, handgemaakte modellen, kunt u zijn website bekijken.[6] Tegenwoordig zijn er ook computerprogramma's die het maken van de uitslagen, het zoeken van de vouw- en plaklijnen vergemakkelijken, zoals *Hedron*[7], *Stellation Applet*[8] en *Great Stella*[9].

Persoonlijke slotbeschouwing

Ik heb geen speciale affiniteit met het raakvlak van wiskunde en kunst, maar ben wel geboeid geraakt door al het moois wat ik gezien en fascinerende wat ik gehoord heb.
Ik heb wel een speciale affiniteit met wiskunde en onderwijs; dat moet als juf. Veel deelnemers aan het

congres reageerden enthousiast en nodigden me speciaal bij hun voordracht uit, als ze vernamen dat ik wiskundedocente ben: ‘Het zou zo goed zijn voor leerlingen en het onderwijs als er veel meer aan kunst gedaan zou worden binnen de wiskundelessen, het spreekt leerlingen erg aan en verbetert het onderwijs.’
Ja, maar hoe dan? Met welk doel haal ik kunst binnen? Bij welke onderwerpen? Verbetert het onderwijs als het leuker wordt? Is leuker maken een doel op zich omdat het leerlingen motiveert? En welke leerlingen raken gemotiveerd? En wie stoot het af? En wat helpt het leerlingen als ze mooie fractal-achtige plaatjes kunnen maken van hogeregraads polynomen zonder dat ze doorgronden hoe de plaatjes ontstaan?
Helaas is het me niet gelukt om over al mijn vragen echt in gesprek te raken met de congresdeelnemers. Begrijpelijk, het was geen onderwijscongres, maar wel jammer. Hun enthousiasme riep bij mij zoveel vragen op waarover ik graag in gesprek wilde.
Sommige onderdelen van de wiskunde zijn niet leuk, ook niet leuk te maken - en is dat zo erg? Niets zo vreselijk als ‘opleuken’ als doel; soms bestaat leren uit doorbijten, knarsetanden, de moed niet verliezen en gewoon doorgaan. Maar, hiernaast kan het een verademing zijn als je een invalshoek vindt waarmee je leerlingen op een andere manier betrekt bij de wiskunde. Kunst spreekt vast een deel van de leerlingen aan, net zoals andere leerlingen extra motivatie halen uit bijvoorbeeld de geschiedenis van de wiskunde, realistisch probleemgestuurd onderwijs, wedstrijden en spelen of ‘$e^{\pi i}$-gekke’ docenten. Wat mij betreft is de winst van dit congres dat er weer een nieuwe invalshoek binnen handbereik gekomen is waarmee ik mijn didactiek zou kunnen uitbreiden.
Ik hoop dat de internet-route u ook nieuwe inspirerende ideeën voor uw onderwijspraktijk laat opdoen.

Noten

De organisatoren van dit congres waren ISAMA (International Society of Art, Mathematics and Architecture) en BRIDGES (Mathematical connections in art, music and science).

Verwijzingen naar internetadressen van genoemde personen en/of werken:
[1] www.isama.org/conf/isama03/ en www.sckans.edu/~bridges/
[2] www.susqu.edu/brakke/evolver
[3] www.rinusroelofs.nl
[4] www.bonner-design.com
[5] www.cgl.uwaterloo.ca/~csk/phd/
[6] www.polyedergarten.de
[7] www.physics.orst.edu/~bulatov/polyhedra/
[8] http://web.ukonline.co.uk/polyhedra/
[9] http://home.connexus.net.au/~robandfi/Stella.html
[10] www.cs.berkeley.edu/~sequin/

Overige interessante ‘wiskunde en kunst’–internetadressen, overgenomen uit de Conference Proceedings:
www.arsetmathesis.nl
www.cs.uu.nl/~marc/composable-art/
mathartfun.com
www.mmahan.us
www.polynomiography.com
www.georgehart.com/
www.polydron.com
www.geomview.org
www.fadu.uba.ar/maydi
www.shadowfolds.com/polypouches

Literatuurverwijzingen

[L1] R. Sarhangi, eds.: Meeting Alhambra, Isama-Bridges 2003, Conference proceedings, Mathartfun.com, isbn 84-930669-1-5.
[L2] Carlo Pedretti: Leonardo Architect, pp. 154-155 (1981).
[L3] J.M. Castera: Arabesques, ACR, Parijs (1996, Frans en 1999, Engels).
[L4a] J. Kappraff: Beyond Measure, A Guided Tour through Nature, Myth and Number, Singapore, World Scientific Publ. (2002).
[L4b] J. Kappraff, Connections, The Geometric Bridge between Art and Science, 2nd ed., Singapore, World Scientific Publ. (2001).

Over de auteur

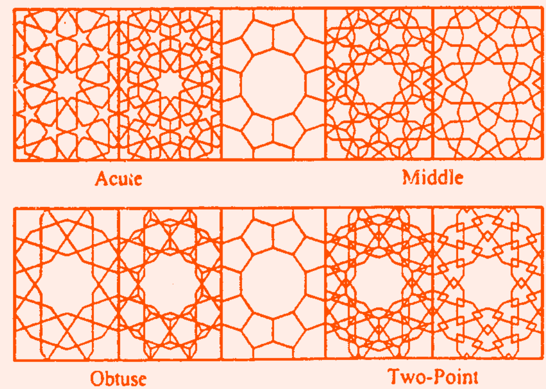
Klaske Blom (e-mailadres: kablom@tiscali.nl) werkt als wiskundedocente op het Hooghe Landt in Amersfoort. Zij is tevens redacteur van Euclides.

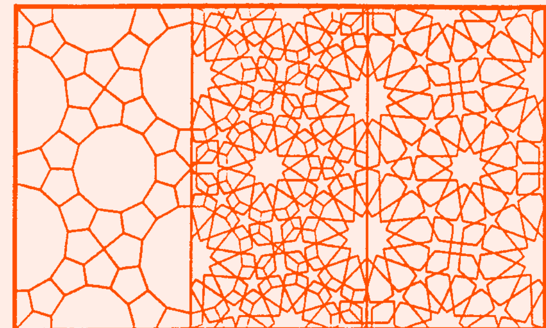
LESIDEE

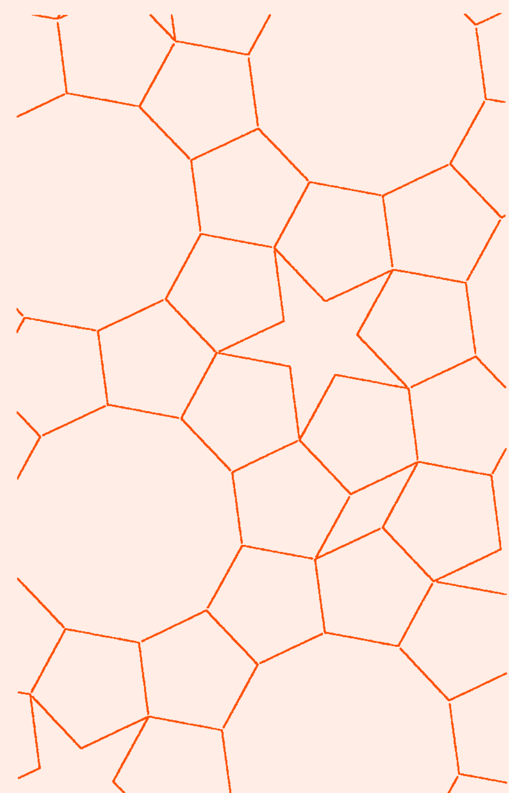
[Klaske Blom]

Tegelmozaïeken

Aan de tegelmozaïeken zoals we die tegenkomen in het Alhambra en in andere Islamitische bouwkunst, liggen roosters met regelmatige veelhoeken ten grondslag. Deze veelhoeken kunnen mijns inziens in verschillende lessen opduiken: heel basaal als onderdeel bij het herkennen van diverse meetkundige vormen, maar ook in een complexer verband zoals tijdens een bespreking van de (on)mogelijkheid van constructies met passer en liniaal.
Zelf wil ik met deze mozaïeken mijn lessen over het werk van Escher trachten te verbeteren. Ik vertel leerlingen altijd over één van Eschers scheepsreizen waarop hij terecht kwam in Granada en daar onder de indruk raakte van de tegelpatronen in het Alhambra; weer thuis gekomen dienden ze als inspiratiebron voor zijn verdere werk.
Aan dit verhaal kan ik nu een activiteit koppelen waardoor leerlingen in één les zelf kunnen ervaren hoe een mozaïek te ontwerpen is. De constructiemethode gaat uit van een onderliggend rooster van al dan niet regelmatige veelhoeken. Op dit veelhoekrooster ontstaan de mozaïeken door het trekken van snijdende lijnen door het midden van de zijden van de veelhoeken. De hoek waaronder deze snijdende lijnen getrokken worden bepaalt het mozaïekpatroon.
Bonner onderscheidt vier verschillende families van patronen:
- scherpe (*acute*) patronen (snijdende lijnen onder een hoek van 36°),
- midden (*middle*) patronen (snijdende lijnen onder een hoek van 72°),
- stompe (*obtuse)* patronen (snijdende lijnen onder een hoek van 108°),
- twee-punts (*two-poins*) patronen (de zijden van de veelhoek worden op twee plaatsen gesneden door een paar lijnen).
Als het meetkundige patroon van snijdende lijnen gelegd is, kan het oorspronkelijke veelhoekrooster weer verwijderd worden en houd je het mozaïek over.
Een eenvoudig en veelvoorkomend mozaïek is dat wat ontstaat uit een pentagonrooster (zie figuur 3). Een complexere structuur ziet u in figuur 4; links het onderliggende rooster samengesteld met regelmatige 11- en 13-hoeken en rechts het 'scherpe' mozaïekpatroon dat ontstaat. Door leerlingen bijvoorbeeld het onderliggende vijfhoek-rooster als mal te geven, kunnen ze in relatief korte tijd hun 'eigen Alhambra-mozaïek' ontwerpen; zelf moeten ze de hoek kiezen waaronder de lijnen elkaar snijden, en het vraagt uiteraard een grote precisie in tekenwerk.
Uw creativiteit kunt u uitleven in de vele variaties die mogelijk zijn door het grondpatroon te variëren. Met Cabri tekent u in een handomdraai zelf uw eigen veelhoekrooster (zie als voorbeeld figuur 5).







FIGUUR 3, 4, 5

PROFIELWERKSTUK WISKUNST

Beeldende vormgeving en Platonische lichamen als inspiratiebron

[Ab van der Roest]

Achtergrond

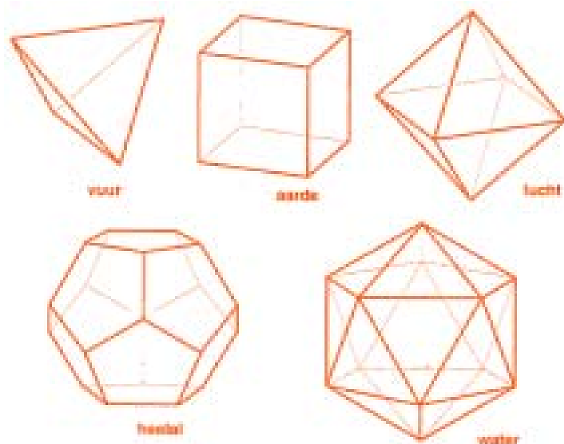
Een van de mooiste gevolgen van het invoeren van de Tweede fase is volgens mij dat leerlingen een praktische opdracht en een profielwerkstuk moeten maken. In de eerste opzet zou het profielwerkstuk een soort meesterproef moeten zijn. De leerling zou hierop voorbereid worden door middel van de praktische opdrachten, en hij zou al zijn onderzoeksvaardigheden moeten laten zien bij het profielwerkstuk.
Op het Ichthus College te Veenendaal kan de leerling geheel vrij kiezen voor welk profielvak hij een profielwerkstuk gaat maken. In 4-havo en in 5-vwo wordt door de klassenmentoren een algemene voorlichting over het profielwerkstuk verzorgd. De leerling vult daarna in overleg met de vakdocent een keuzeformulier in. Dan begint het proces van onderwerp kiezen. Vanaf het eerste moment wordt er een logboek bijgehouden waarin genoteerd worden de activiteit en de tijd die daarvoor nodig was, de werkafspraken met de begeleider en de problemen die de leerling tegengekomen is. Zo houd je het overzicht wat er allemaal gebeurd is gedurende het project en kun je bij de eindbeoordeling niet alleen het eindproduct beoordelen, maar je ook nog eens het proces voor de geest halen. Uiteindelijk is het bij een praktische opdracht en bij het profielwerkstuk de bedoeling dat *vaardigheden* worden beoordeeld.

Wiskunde?!

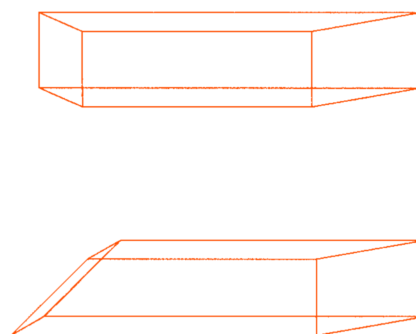
Naast mijn lesgevende taak ben ik ook afdelingscoördinator havo-4/5 en secretaris van het examen, en ik registreer de keuzes van de leerlingen. Wat opvalt is dat veel leerlingen veelal traditioneel kiezen: C&M- en E&M-leerlingen kiezen veel geschiedenis, N&G-leerlingen biologie en N&T-leerlingen natuurkunde. De keuze van de leerling wordt op een of andere manier beïnvloed door het feit dat deze vakken een rijkere traditie hebben aan scripties en/of practica. De profielwerkstukken zijn bijna altijd scripties.

Wiskunde is geen vanzelfsprekende keuze; uiteindelijk vinden velen het een moeilijk vak. Daarnaast is het idee dat je een profielwerkstuk voor wiskunde kunt maken iets wat veel leerlingen zich niet goed kunnen voorstellen. Dat heeft waarschijnlijk te maken met het feit dat er bij de wiskundelessen bijna nooit iets te kiezen valt. Je volgt het boek en adviseert de leerlingen bepaalde sommen te maken; de praktische opdracht is vaak maar één onderwerp waar de leerlingen verplicht aan moeten werken. Voor de meeste leerlingen wordt wiskunde op die manier gereduceerd tot iets wat in een leerboek staat en nauwelijks werkelijkheidswaarde heeft. Het is dus nodig dat we als docent leerlingen een beetje weten te strikken voor ons vak.

In het cursusjaar 2002-2003 lukte me het gelukkig weer, enkele leerlingen over de streep te trekken om het profielwerkstuk bij wiskunde te doen. De volgende stap is dan het kiezen van een onderwerp. Ik probeer de onderwerpen voor het profielwerkstuk te laten aansluiten bij het profiel van de leerling en bij zijn eigen interesse. Daarnaast probeer ik de leerling meteen gerust te stellen dat het niet per se heel moeilijk hoeft. Ik vind het belangrijk dat ze plezierig met wiskunde bezig zijn en de diepgang van het werkstuk laat ik mede bepalen door de wiskundige capaciteiten. Soms is zo'n werkstuk dan alleen maar een literatuurstudie waar verslag van gedaan wordt; de



FIGUUR 1



FIGUUR 2, 3

eis is echter wel dat de leerling moet begrijpen wat hij schrijft. Een leerling die wiskunde B12 heeft zal ook bewijzen moeten leveren in zijn profielwerkstuk.

Wianda's voorbereiding

Wianda zat in 5-vwo en volgde het C&M-profiel met beeldende vormgeving. Ze had wiskunde-A1 en wilde het profielwerkstuk bij wiskunde doen. Beiden vonden we het vanzelfsprekend dat we iets 'wiskunstigs' moesten doen. Nadat we enkele onderwerpen zoals het werk van Escher en van andere kunstenaars de revue hadden laten passeren, kwamen we te praten over de Platonische lichamen. 'Kun je daar een profielwerkstuk over maken?', vroeg Wianda zich hardop af. 'Dat kan', was mijn reactie. Misschien is het dan aardig een ruimtelijk object te maken, was mijn voorstel.
Wianda vond dat een goed plan en we zijn op zoek gegaan naar literatuur. In deze fase help ik de leerling gericht zoeken, omdat er anders teveel tijd verloren gaat. Ik heb Wianda de volgende lectuur gegeven:
- 'De Veelzijdigheid van Bollen' van Martin Kindt en Peter Boon (Zebra-reeks, nr. 9);
- 'Wiskunstige schoonheid' van Bruno Ernst (AO 2438);
- 'Geheimen van de vijfhoek' door Jan van de Craats (een artikel uit Pythagoras, oktober 2001).

Hiermee kon Wianda de zomervakantie in.
Terug in 6-vwo kwamen er enthousiaste verhalen. Na de boekjes globaal doorgelezen te hebben was de keuze gemaakt om een kleine scriptie te schrijven over Platonische lichamen en een werkstuk na te maken van Popke Bakker. Van dit werkstuk zou een praktijkverslag toegevoegd worden. Het werkstuk draagt de naam *Quintessens* en het stelt een Hamiltonpad op een dodecaëder voor. Dit laatste leek haar het mooiste gedeelte van het profielwerkstuk.

Theorieverslag

Het eerste deel van het profielwerkstuk was dus een beschrijving van de Platonische lichamen. Wianda maakte dankbaar gebruik van het internet en van de boekjes die ze in de zomervakantie doorgewerkt had. Het is de bedoeling dat we in de fase van het schrijven van dit werkstuk regelmatig voortgangsgesprekken hebben, maar hiervan is in de praktijk weinig terechtgekomen. Dat was best jammer, want in het werkstuk kwamen passages voor die welwillend overgeschreven waren, maar niet begrepen werden; zoals:

Als van een drievlakshoek de zijden α, β en λ zijn, dan is de hoek (standhoek) tussen de vlakken met zijden α en β gegeven door:

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos\alpha\cdot\cos b}{\sin\alpha\cdot\sin\varphi}$$

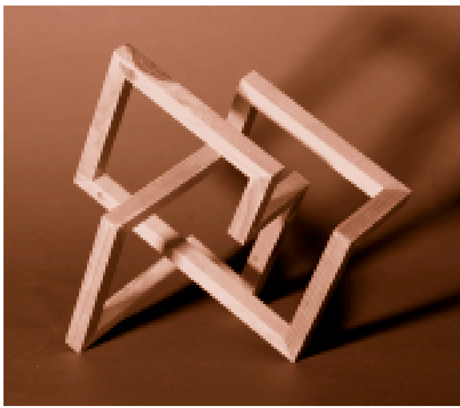
Hierover zou je van tevoren met een leerling moeten praten, maar het staat opeens in het eindproduct. Als ik dat eerder gelezen had, zou ik geadviseerd hebben het weg te laten. Een leerling denkt waarschijnlijk dat een werkstuk over wiskunde moet imponeren door moeilijke formules. Weglaten is een belangrijke vaardigheid. Uiteraard kwam de formule van Euler ook aan de orde (en dat is wel terecht):

Voor een lichaam met H hoekpunten, Z zijvlakken en R ribben geldt de formule van Euler: $H + Z = R + 2$

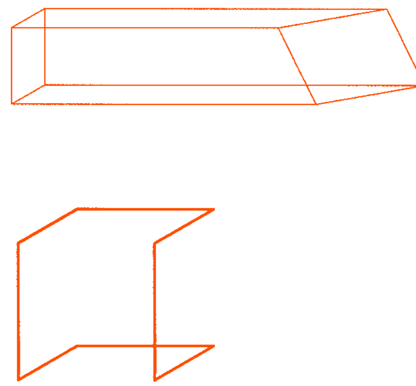
Het minste dat een wiskunde-A1 leerling kan doen, en dat deed Wianda dan ook, is controleren of de formule klopt voor de Platonische lichamen.
In de theorie behandelde Wianda ook nog iets van de geschiedenis van de Platonische en Archimedische lichamen. Ze vermeldde tevens dat Plato zijn wereldbeeld koppelde aan de vijf Platonische lichamen: vuur, lucht, water, aarde en hemelmaterie.

Praktijkverslag

In het praktijkverslag behandelde Wianda eerst de begrippen 'verstek' en 'dubbelverstek'. Zij baseerde dit op het AO-boekje.
Het balkje van figuur 2 is in *enkel verstek* gezaagd en kan als bouwsteen dienen voor een fotolijstje. Van zulke balkjes kun je verder niet zoveel bijzonders maken; er ontstaat een rechthoekige vorm of een lange balk.
Interessanter wordt het als je aan één kant gewoon verstek zaagt, vervolgens het balkje kantelt en dan weer gewoon verstek zaagt (zie figuur 3).
Leggen we enkele van deze balkjes tegen elkaar, dan gaan we de ruimte in en kunnen we bijvoorbeeld een knoop maken. Ik heb zelf een keer zoiets gemaakt van wat restmateriaal (zie de foto in figuur 4).



FIGUUR 4



FIGUUR 5, 6

Bij *dubbelverstek* zagen we onder een bepaalde hoek, maar kantelen we de zaag ook nog een keer.
Er ontstaan balkjes als figuur 5. De zaagsnede is een parallellogram en je kunt er een gelijksoortig balkje tegenaan lijmen. Ook dit levert een ruimtelijke figuur op, maar nu niet met hoeken van 90°, maar andere hoeken. Deze balkjes zijn de bouwstenen van de dodecaëder.
Vervolgens legde Wianda uit wat een *Hamiltonpad* is: een weg op een ruimtelijke figuur zodat alle hoekpunten van de figuur eenmaal aangedaan worden. Ze gaf als voorbeeld een Hamiltonpad op een kubus; zie figuur 6.

In het AO-boekje is een uitslag afgedrukt waarmee je de ruimtelijke figuur Quintessens kunt nabouwen. Aan de lezer wordt voorgesteld de figuur op stevig papier af te drukken, uit te knippen en in elkaar lijmen. Dit bevredigde Wianda echter niet. Het moest een mooier werkstuk worden, van duurzamer materiaal. Ze maakte de keuze voor hout, maar hoe kun je dubbelverstek zagen? Ik leende haar een zaag en Wianda is daarmee aan de gang gegaan. Het eindproduct was de moeite waard en staat, sinds de inleverdatum, op mijn computer in mijn werkkamer. Quintessens is opgebouwd uit houten balkjes van 27 mm bij 27 mm. De totale hoogte is 18 cm (zie pag. 149).

Uit het verslag bleek dat de ingeleverde Quintessens niet de eerste was. De eerste die ze maakte voldeed niet aan haar eisen, en ze maakte een nettere. Ze was behoorlijk wat problemen tegengekomen, zoals hoe groot de hoek moet zijn waaronder gezaagd wordt en hoe je stevigheid krijgt in het kunstwerk.
De hoekbepalingen heeft ze gedaan aan de hand van het voorbeeld van de bouwplaat, en bij de tweede versie heeft ze die iets aangepast. Ze heeft hieraan niet gerekend. Dit is voor een A1-leerling te ingewikkeld, en het was ook het doel niet.

Beoordeling

Op grond van het 'kunstwerk' heb ik het profielwerkstuk de beoordeling 'goed' gegeven. Het theorieverslag had beter gekund. Vooral de toepassingen van de Platonische lichamen in de kunst miste ik, terwijl daar toch voldoende voorbeelden van te vinden zijn: Escher die de Platonische lichamen in zijn tekeningen en etsen gebruikte, de lampen (dodecaëders!) in de oude Tweede Kamer, afbeeldingen in de trein enzovoort.
In het eindgesprek met Wianda vroeg ik haar waarom ze Quintessens had nagemaakt. Haar laconieke antwoord was: 'Hier had ik een bouwplaat van!' Maar het resultaat was van dien aard dat ze erg trots was dat ze het gemaakt had.

Ik stel me na afloop van zo'n project altijd weer de vraag of het voldeed. Is het wiskundig gezien voldoende? Volmondig durf ik hier ja op te zeggen. Wianda heeft de wiskunde vanuit een totaal andere hoek bekeken dan ze ooit voor mogelijk had gehouden. Ze heeft een zoektocht over het internet gemaakt en telefonisch contact gezocht met Dr. Koos Verhoeff. Ze schreef dat het telefoongesprek verhelderend was geweest; en ze was ook door de heer Verhoeff uitgenodigd om eens langs te komen in zijn expositieruimte (dit laatste ging helaas vanwege een te grote afstand niet door).
Mijns inziens hoeft het wiskundig niet altijd even diep te gaan. We mogen dat best afstemmen op de capaciteiten van de leerling, maar dat betekent natuurlijk niet dat we te snel tevreden moeten zijn.

Nieuwe opdrachten

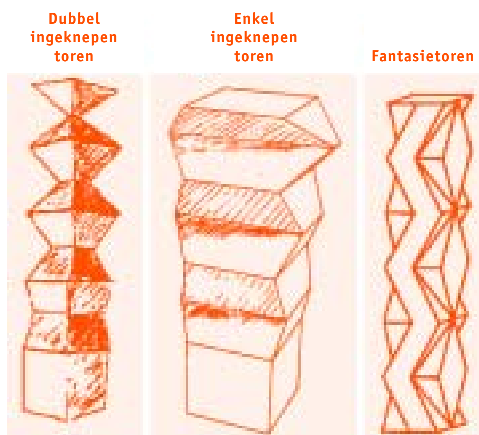
Ook dit jaar begeleid ik weer een paar leerlingen. Nu zijn het havo-leerlingen vanuit het C&M-profiel. Moeilijkheid is toch ook nu weer welke opdracht je ze moet geven. Het vinden van onderwerpen is een voortdurende zoektocht. Het internet kan hier bij helpen, maar ik kom de leukste onderwerpen tegen als ik de krant of een tijdschrift lees en als ik de boekenkast doorsnuffel.

Foto's

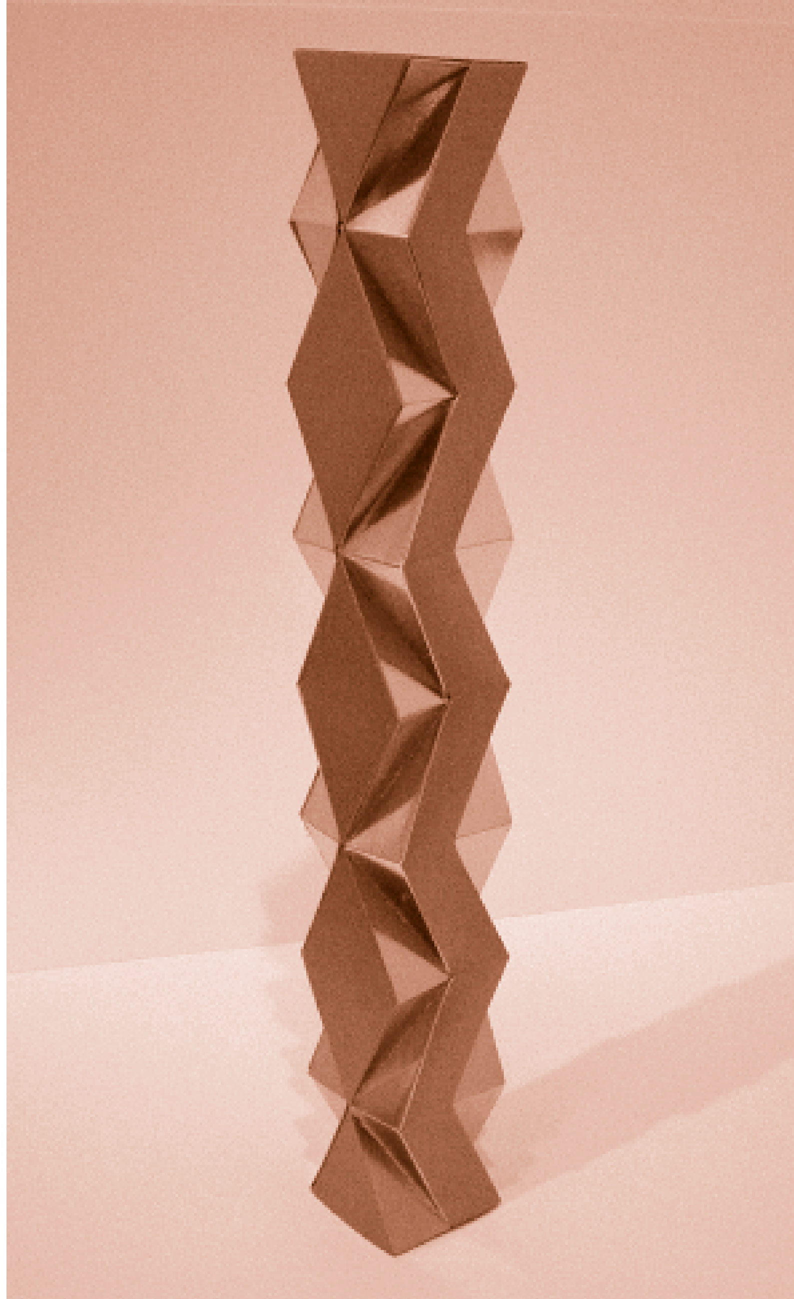
Dick Bouwman Fotografie / Ichthus College, Veenendaal

Over de auteur

A.B. van der Roest (e-mailadres: ro@ichthuscollege.nl) is docent en afdelingscoördinator havo-4/5 aan het Ichthus College te Veenendaal.



FIGUUR 1


FIGUUR 2

WISKUNSTIGE TORENS

Een veelvlakkenproject voor leerlingen in het voortgezet onderwijs

[Cynthia Pattinaja, Hanneke Winterwerp, Kristie Ambrosius, Ton Konings]

Aanleiding

Eerstejaars studenten wiskunde van de tweedegraads lerarenopleiding van het ILS (Instituut voor Leraar en School) te Nijmegen deden mee aan de Pythagoras Veelvlakken Wedstrijd 2003, en werden beloond met de tweede prijs in de categorie 'Klasseninzending'. Hun inzending had de titel 'Een veelzijdig veelvlakken-project'.
Dit artikel presenteert een deel van dit project: een opdracht die studenten zelf uitvoerden, en bewerkten tot werkbladen voor leerlingen in het voortgezet onderwijs.

Eerstejaars cursus op de lerarenopleiding

Het leerplan van onze lerarenopleiding bevat de volgende passage: *'Naast deze praktische kant van de wiskunde zijn er ook belangrijke culturele en esthetische aspecten. De wiskunde behoort tot de grootste en indrukwekkendste scheppingen die de mensheid heeft voortgebracht. Ook in het wiskunde-onderwijs moet iets van de schoonheid en de onvergankelijkheid van bepaalde wiskundige resultaten doorklinken. Het is dan ook zeker de taak van de wiskundeleraar om de leerlingen in contact te brengen met dit erfgoed. Vooral de meetkunde en de getaltheorie bieden hiertoe een keur aan mogelijkheden.'*
Hierin past al jarenlang onze cursus 'Veelvlakken', waarin de schoonheid van de wiskunde ook wordt verbonden met kunstzinnige schoonheid. In die cursus bestuderen de studenten uitvoerig het onderwerp veelvlakken. Ook maken ze elk diverse objecten van karton, waarbij het een sport is - met als enige gegeven een plaatje van een vaak complex veelvlak - een bouwplaat uit één stuk te ontwerpen.

Vervolgproject

Na de cursus met alle eerstejaars wiskundestudenten zijn het afgelopen studiejaar vijf studenten in de gelegenheid gesteld als keuzemodule een vervolg-activiteit te doen: het bouwen van gecompliceerde veelvlakken en het ontwerpen en uitvoeren van lesbrieven tijdens de stage. Een presentatie van het totale project is te vinden op de site van de opleiding[1].

Een kluif voor studenten

Één van de opdrachten voor de studenten was om met het plaatje van figuur 1 één van de torens te maken. Hoewel dit onderwerp prima past in de leerstof Ruimtemeetkunde van havo-B12, doet dit bij de ex-havo-leerlingen zonder verdere structurering een behoorlijk beroep op hun ruimtelijk inzicht. Een aantal karakteristieke fouten:
- Bij de beide ingeknepen torens komt het nog vaak voor dat in de bouwplaat de hoogtes van de schuin naar binnenvallende trapezia 5 cm gekozen wordt. De stelling van Pythagoras wordt niet twee maar slechts één keer gebruikt. Gevolg is dat de etages niet even hoog zijn, maar in hoogte afnemen.
- Vaak ontbreekt bij de fantasietoren het inzicht, dat het deel tussen de slinger en de ruiten uit rechthoekige driehoeken bestaat. Er worden dan vervolgens foutieve berekeningen gemaakt.
- Het tekenen van plakrandjes loopt niet altijd goed af.
Verdere karakteristieke problemen hebben een relatie met het feit dat de objecten niet convex zijn ('deuken hebben'):
- Bij de tweede toren wordt veelal een bouwplaat gemaakt met het grondvlak als centrum en de zijkanten als wieken van de molen eromheen. Dat in de bouwplaat de zijkanten precies aan elkaar passen en dus zonder snijden en plakken uit één stuk kunnen, wordt ook door studenten als veel charmanter gevonden. Bovendien bespaart dit karton.
- Bij de fantasietoren (zie figuur 2) is het ontwerpen van een bouwplaat uit één stuk een hele kunst, omdat er nogal wat punten zijn waarbij de som van de hoeken die er samenkomen meer is dan 360 graden. Door het uitvoeren van hun foutieve ontwerpen krijgen ze dan harde feedback. Veel hulp van de begeleider hebben ze daarom meestal niet nodig.

Bewerking naar leerlingenniveau

Deze opdrachten leken geschikt om te bewerken tot werkbladen voor leerlingen van het voortgezet onderwijs. Het aardige van de opdracht is dat de leerlingen een aantal keren 'Pythagoras in de ruimte' moeten toepassen, en met name bij de eerste twee torens krijgen ze door herhaalde berekening voor elke laag behoorlijk wat oefening. De opdracht zou een behoorlijk aantal opgaven uit het boek kunnen vervangen. Nadere structurering is dan wel nodig. Voor elke toren is daartoe een werkblad geschreven.
De opdrachten werden uitgeprobeerd tijdens de eerstejaars stage in klas 3-vwo van het Blariacum College te Venlo.

Ervaringen in 3 vwo

De leerlingen konden kiezen voor één van de drie opdrachten.
Tijdens de eerste les kwamen ze wat langzaam op gang. Dit kwam waarschijnlijk doordat de lesbrief te veel tekst bevatte; de meeste leerlingen gingen liever zelf wat uitproberen. Ze begonnen met onderzoeken hoe de gekozen figuur in elkaar zat. Vervolgens moesten ze zich een beeld proberen te vormen van de bijbehorende bouwplaat, met juiste afmetingen. Daar had het merendeel best veel moeite mee, ze bleken hierbij toch nog wat hulp nodig te hebben. Ze moesten bijvoorbeeld inzien dat, als de hoogte van iedere kubuslaag 10 cm is, de hoogte van de ingeknepen trapeziumvormige vlakken niet twee keer 5 cm is, maar dat ze die juist moesten berekenen. Eenmaal tot dit soort inzichten gekomen schoot het erg op, doordat soortgelijke berekeningen zich herhaalden in de verschillende lagen. Aan het eind van de les hadden bijna alle leerlingen een juiste uitslag met bijbehorende afmetingen getekend. Ze werkten enthousiast en ijverig. Ze hielpen elkaar goed; het in groepjes aan dezelfde soort toren werken bleek met name in deze les van belang te zijn. De enkel ingeknepen toren bleek het moeilijkst te zijn.

De tweede les konden de meeste leerlingen de uitslag die ze de vorige les getekend hadden, op karton gaan overzetten. Hier zijn ze de hele les mee bezig geweest. Het was voor sommige leerlingen moeilijk om in te schatten hoe ver ze van de rand moesten beginnen met tekenen. Verder moesten leerlingen er goed aan herinnerd worden, de plakrandjes niet te vergeten. Voor de derde les (figuren 3 en 4) moest de bouwplaat op karton getekend zijn. In de les werd er druk geknipt, gesneden, geritst, gevouwen en geplakt. Uiteindelijk hebben niet alle leerlingen hun toren afgekregen, zij zouden hem thuis afmaken. Toch waren er ook een aantal mooie torens als eindresultaat te zien. De leerlingen hebben met veel plezier aan de opdracht gewerkt en een aantal stevige ruimtelijke ervaringen opgedaan.

Aanpassing

Ervaring met de leerlingen wees uit dat de drie begeleidende studenten in de eerste les nog hun handen vol hadden. De ontworpen werkbladen zouden dus nader gestructureerd moeten worden, om te zorgen voor een werkbare situatie voor één docent. Na afloop zijn de werkbladen dan ook aangepast. De eerste opdracht is hierbij opgenomen. De andere opdrachten zijn te vinden op de ‘Good Practice’-afdeling van APS-wiskunde[2].

Verdere bruikbaarheid

Deze opdracht is door de docent op het Blariacum College beoordeeld als een handelingsdeel. Voor havo wiskunde-B12 lijkt deze opdracht geschikt als praktische opdracht. Afhankelijk van de klas kunt u schrappen in de structurering van de opdrachten. Het maken van een beoordelingsprocedure met een paar stappen valt buiten het bestek van dit artikel. Het is heel goed denkbaar de opdracht op één dag te plannen. Sommige scholen organiseren zo hun praktische opdrachten.

Noten

[1] http://145.74.103.12/ils/wiskunde/pythagoras/veelvlakken/index.htm
[2] Materiaal bij Verwondering en Verbeelding; zie www.aps.nl/wiskunde/lesvoorbeelden.htm

Over de auteurs

Cynthia Pattinaja, Hanneke Winterwerp en Kristie Ambrosius zijn inmiddels tweedejaars wiskundestudenten aan de tweedegraads lerarenopleiding van het Instituut voor Leraar en School te Nijmegen. Hun e-mailadressen: cmpattinaja@student.han.nl, hwinterwer@student.han.nl, kflambrosi@student.han.nl.
Ton Konings (e-mailadres: ton.konings@ils.han.nl) is werkzaam aan de tweedegraads lerarenopleiding van het Instituut voor Leraar en School te Nijmegen als vakdocent en vakdidacticus wiskunde. Ook is hij medewerker van APS-wiskunde te Utrecht.

FIGUUR 3, 4



Wiskunstige toren

- Deze ingeknepen toren heeft vijf lagen die ieder even hoog zijn.
- Elke laag is afgeleid van een kubus van 10 x 10 x 10 cm.
- Hoe hoger de laag, hoe meer de kubus aan de zijkanten wordt ingeknepen.
- Het inknijpen gebeurt steeds op de halve hoogte van iedere laag.
- Het inknijpen gebeurt aan alle 4 kanten steeds 1 cm meer dan bij de vorige kubus.



Opdracht

- Maak een tekening van de bouwplaat uit één stuk.
- Maak deze toren van karton.

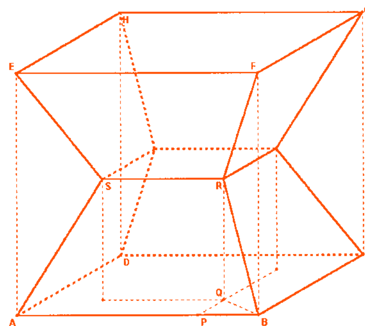
Werkblad Dubbel ingeknepen toren

Voer de volgende stappen uit.

1) Maak een schets van hoe je denkt dat de bouwplaat eruit komt te zien (in kleiner formaat). Van sommige zijden weet je de maten nog niet, dus maak steeds schattingen. Je kunt in eerste instantie de plakrandjes weglaten, teken die er later bij (werk met enkele plakrandjes, dus niet plakrandje-plakrandje, maar plakrandje-vlak).

2) De lagen kubussen worden van beneden naar boven steeds meer ingeknepen. Dit gebeurt op de halve hoogte van de kubus aan de zijkanten. De kubussen worden steeds ingeknepen met 1 cm meer. Laag 2 wordt aan alle 4 kanten dus 1 cm ingeknepen, laag 3 2 cm, enz.

3) Bedenk nu welke maten nog ontbreken voor het tekenen van de bouwplaat. Deze maten zul je moeten berekenen. Begin met laag 2.
AB = AE = 10 cm, PQ = 1cm.
Vrij eenvoudig kun je nu RS, BP en QR bepalen.
Bereken vervolgens in twee decimalen nauwkeurig: BQ en BR.



4) Zet alle maten die je weet in de tekening en in de schets van de bouwplaat.

5) Doe hetzelfde voor laag 3, 4 en 5.

6) Je kunt nu de bouwplaat tekenen. Begin weer met de basisvorm, voeg er daarna pas de plakrandjes aan toe. Kniplijnen teken je doorgetrokken, vouwlijnen gestippeld. Plakrandjes hebben een trapeziumvorm met een hoogte van minimaal 0,5 cm en maximaal 1 cm.

7) Je kunt de bouwplaat het beste uitknippen of snijden met een stanleymesje. De lijnen die je van je af moet vouwen, kun je met de stompe kant van een schaar ritsen, of voorzichtig een beetje insnijden met een stanleymesje.

8) Voor het lijmen de lijm dun aanbrengen op beide te lijmen delen, even laten drogen (tot hij bij licht aanraken niet meer aan je vinger blijft kleven). Dit is heel belangrijk want het voorkomt vlekken! Vervolgens stevig maar voorzichtig aandrukken. Het werkt soms beter een bepaald stuk goed te laten drogen alvorens verder te gaan.

DE GULDEN SNEDE IN DE KUNST

[Wim Kleijne]

Inleiding

In dit artikel zal ik ingaan op de aanwezigheid van de gulden snede in diverse vormen van kunst. Speciaal zal ook de vraag aan de orde komen of kunstenaars de gulden snede bewust dan wel onbewust hebben toegepast in hun kunstwerken. Vooraf zal ik in vogelvlucht enige fundamentele wiskundige eigenschappen van de gulden snede de revue laten passeren.

De Gulden Snede

De gulden snede, ook wel de '*goddelijke verhouding*', of bij Euclides de '*verdeling van een lijnstuk in uiterste en middelste reden*', is de verhouding van de twee delen waarin een lijnstuk wordt verdeeld zó, dat
$k : g = g : (k + g)$, met $k < g$.
Eenvoudig volgt:

$$g^2 = k^2 + kg \quad \text{en} \quad \left(\frac{g}{k}\right)^2 - \frac{g}{k} - 1 = 0$$

wat als oplossing geeft:

$$\frac{g}{k} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \approx 1{,}61803$$

Het is gebruik om dit getal met φ aan te duiden. Dus:
$\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
Uit het voorgaande volgt direct dat $\varphi^2 = \varphi + 1$.
Maar dan volgt ook:
$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$
$\varphi^4 = 2\varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2$
Dus de meetkundige rij 1, φ, φ^2, φ^3, φ^4, ...
ofwel 1, φ, $\varphi + 1$, $2\varphi + 1$, $3\varphi + 2$, ...
is een rij waarvan iedere term gelijk is aan de som van de twee termen die eraan vooraf gaan. Hierin herkennen we het criterium dat ten grondslag ligt aan de bekende rij van Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
Omgekeerd echter is de verhouding van twee opvolgende termen van de rij van Fibonacci niet gelijk aan φ. De rij van die verhoudingen is
$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \ldots$
ofwel 1; 2; 1,5; 1,6...; 1,6; 1,625; 1,615...; ...
Het lijkt er op dat deze laatste rij naar φ convergeert; dat is inderdaad het geval.
Het bewijs van de convergentie laten we hier achterwege. Maar als we ervan uitgaan dàt de rij convergeert, dan volgt eenvoudig uit $t_{n+1} = t_n + t_{n-1}$ dat

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1 + \frac{t_{n-1}}{t_n}$$, en dus (als L de limiet van de rij is)

$$L = 1 + \frac{1}{L} \quad \text{ofwel} \quad L^2 - L - 1 = 0 \text{ , dus } L = \varphi.$$

De verdeling van een lijnstuk in uiterste en middelste reden leidt dus tot een heel opmerkelijke proportie (= verhouding), waarin multiplicatieve en additieve aspecten gecombineerd zijn. Dit komt duidelijk tot uiting in het feit dat de genoemde meetkundige rij tevens aan het criterium van de rij van Fibonacci voldoet.
In de wiskunde wordt een dergelijke combinatie van oudsher om rekentechnische redenen nagestreefd. Denk bijvoorbeeld aan de ontwikkeling van de logaritme, met de formule $\log ab = \log a + \log b$ en aan de zogenoemde p,q-formules, met formules zoals
$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)$
Het hoeft dan ook geen verbazing te wekken dat de rij van Fibonacci en de gulden snede al geruime tijd de aandacht hebben getrokken. De verdeling van een lijnstuk in uiterste en middelste reden was al bij Euclides bekend, terwijl Leonardo van Pisa, bekend onder de naam Fibonacci (= zoon van Bonacci; zie figuur 1), zijn rij al in 1202 publiceerde in zijn *Liber abaci*.

Verschijningsvormen in de kunst

De genoemde verhouding staat bekend onder verschillende namen: goddelijke verhouding (*divina*





FIGUUR 1 Standbeeld van Fibonacci in Pisa

FIGUUR 2

proportione, als naam in 1509 geïntroduceerd door Luca Pacioli), gulden verhouding, gulden snede, e.d. Ondanks het feit dat deze fraaie naam al aan het einde van de Middeleeuwen in gebruik kwam, begint men zich pas in de 19de eeuw in brede kringen voor deze verhouding te interesseren. Met name vanaf die tijd ging men op zoek naar verschijningsvormen van deze proportie en van de getallen uit de rij van Fibonacci in de natuur en in de kunst - vooral vanwege de mening die opgeld deed dat deze verhouding tot de meest fundamentele zou behoren en op een natuurlijke wijze aan ons schoonheidsgevoel zou appelleren. In hoeverre hier de wens de vader is van de gedachte, laat ik nu even in het midden; ik zal er later op terugkomen.
Met het genoemde schoonheidsgevoel zijn we automatisch bij de kunst uitgekomen (zonder hier te willen beweren dat 'kunst' geïdentificeerd zou kunnen worden met 'esthetiek'). In het volgende zal ik voorbeelden tonen waarin de gulden snede en getallen uit de rij van Fibonacci in de kunst voorkomen (of *lijken* voor te komen).

Op het eerste gezicht zou het wellicht verbazing kunnen wekken dat mathematische zaken een plaats in de kunst kunnen hebben. Zou kunst zich laten vangen binnen een opgelegd keurslijf? Wie zó redeneert, vergeet dat kunstbeleving alleen maar kan plaatsvinden binnen een zekere structuur. Een symfonie, een sonate, een sonnet, een kwatrijn, een gothisch bouwwerk, een schilderij van Mondriaan of van Rembrandt, een ballet, al deze kunstuitingen zijn gevormd binnen de structuur die voor die kunstuiting is gekozen. Zoals Theo Willemze in zijn *Algemene Muziekleer* formuleert:
'Structuur is het levenwekkende, dynamische beginsel dat overal – in de kosmos, in het leven, in het goddelijke en het menselijke scheppen – terug te vinden is. Tegenover de *structuur* staat de *chaos*.'[1]

En áls er dan al een mening bestaat omtrent het 'goddelijke' van de gulden snede, ligt het dan niet voor de hand te veronderstellen dat deze proportie een structurerend principe van bepaalde kunstwerken kan zijn? Dan zouden we deze verhouding in kunstwerken moeten kunnen terugvinden.
Maar dan doet zich ogenblikkelijk de vraag voor of de desbetreffende kunstenaar zich van de toepassing van de gulden snede bewust was.

Muziek

Er zijn voorbeelden bekend van kunstenaars die bewust en expliciet de gulden snede of 'Fibonacci' in kunstwerken hebben toegepast.
In zijn *'Pièce pour violoncelle et piano'* uit 1975 heeft Claude Vivier (1948–1983) twee delen van de rij van Fibonacci in elkaar geschoven om de duur te verkrijgen van tonen en motieven, gemeten in kwartnoten (zie figuur 2).
Een dergelijke expliciete, want door de kunstenaar zelf vermelde, toepassing komt niet zo vaak voor. Wél zijn er voorbeelden waar het vrijwel zeker geacht moet worden dat de kunstenaar de toepassing van de gulden snede bewust ingebouwd heeft.
Als voorbeeld hiervan blijf ik nog even in de muziek. De *sonate voor twee piano's en slagwerk* van Béla Bartók (1881–1945) bestaat uit de vier delen: *assai lento – allegro molto – lento ma non troppo – allegro non troppo*. Het gehele stuk bestaat uit 6432 achtste noten. Het tweede deel (lento ma non troppo) begint na 3975 achtste noten:

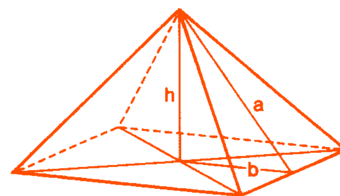
6432	
3975	2457

en dit is vrijwel gelijk aan de gulden snede:

$$\frac{6432}{3975} \approx 1{,}6181 \quad \text{en} \quad \frac{3975}{2457} \approx 1{,}6178$$



FIGUUR 3





FIGUUR 4

terwijl $\varphi \approx 1{,}6180$. Een zo geringe afwijking van φ kan bijna geen toeval zijn.
Iets soortgelijks treffen we veel eerder in de muziekgeschiedenis aan. Bijvoorbeeld bij Guillaume Dufay (1400–1474). In zijn feestmotet *'Nuper rosarum flores'*, gecomponeerd ter gelegenheid van de inwijding van de Dom van Florence (op 25 maart 1436), heeft hij een duidelijke relatie gelegd tussen het aantal tonen van elke stem en de getallen van Fibonacci. Dufay had zich namelijk voor zijn motet sterk georiënteerd op het bouwwerk waarvoor het geschreven was, de *Dom van Florence* (figuur 3). In de bouwopdracht uit 1367 waren de maten voor de te bouwen dom precies vastgelegd. De bouwmeester Brunelleschi (1377–1446) heeft zich grotendeels aan deze maten gehouden. In de maatverhoudingen is de gulden snede behoorlijk vaak terug te vinden.
Bijvoorbeeld. De hoogte van de koepel moest 144 florentijnse Bracci bedragen (1 Braccio ≈ 58,4 cm), terwijl de aanzet van de koepel 89 Bracci hoog moest zijn. Er geldt: $\frac{89}{55} = 1{,}618181... \approx \varphi$

Architectuur

Met de maatverhoudingen van de Dom van Florence zijn we als vanzelf bij de architectuur aangeland. Het ligt voor de hand dat met name in de architectuur structurele overwegingen van oudsher een grote rol hebben gespeeld. Immers, bouwwerken zijn alleen al vanwege de mechanica voor hun constructies veel meer onderworpen aan structuurprincipes dan díe kunstvormen waarin de kunstenaar met dergelijke beperkingen geen rekening behoeft te houden en dus veel vrijer met structuren kan omgaan.
Al in de oude tijd van de Egyptische piramiden kunnen we met betrekking tot de piramide van Cheops, de grote piramide van Giseh, het volgende opmerken. Metingen aan deze piramide wijzen uit dat de standhoek van grondvlak en zijvlakken bij benadering gelijk is aan 51,85°. En daarmee komen we bij de gulden snede uit, want:

$$\cos 51{,}85° \approx 0{,}6177 \quad \text{en} \quad \cos\alpha = \frac{b}{a}$$

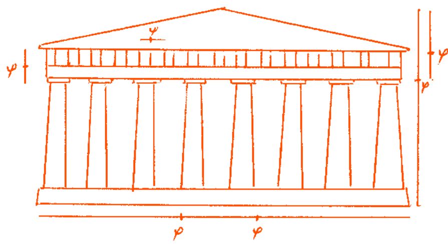
$$\text{dus } \frac{b}{a} \approx 0{,}6177 \approx \frac{1}{\varphi}, \quad \text{of} \quad \frac{a}{b} = \varphi$$

Zie figuur 4. Dit resultaat zou overeenkomen met een passage bij Herodotus waar deze schrijft dat Egyptische priesters over de vorm van deze piramide hadden bepaald dat het kwadraat van de hoogte van de piramide gelijk moest zijn aan de oppervlakte van een zijvlak.
In figuur 4 betekent dit dat $h^2 = ab$.
Gecombineerd met $h^2 = a^2 - b^2$ geeft dit

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0, \quad \text{dus} \quad \frac{a}{b} = \varphi$$

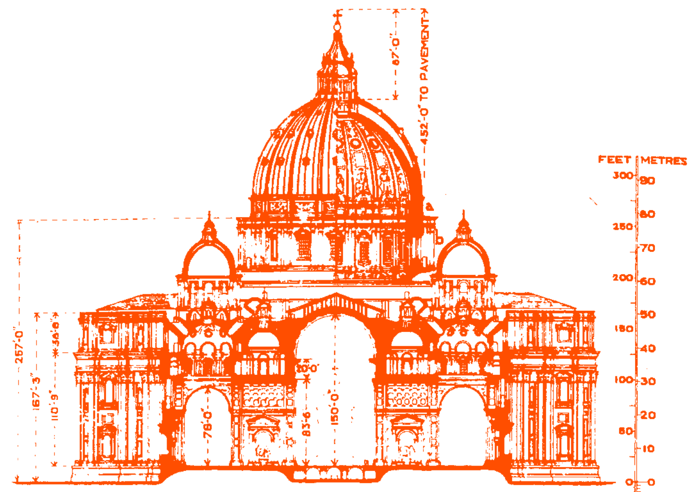
Overigens bestaat er geen overeenstemming onder deskundigen of de interpretatie van de desbetreffende tekst van Herodotus eenduidig op deze situatie betrekking heeft. We laten deze discussie maar rusten en houden ons aan de metingen die inderdaad een aardige benadering van φ hebben opgeleverd. Wél is het waar dat de Egyptische wiskunde in die tijd nog lang niet zo ver ontwikkeld was dat het redelijk zou zijn om te veronderstellen dat de gulden snede bekend geweest zou zijn bij de bouwmeester(s) van deze piramide. Ook in deze situatie schuiven we het even naar een later stadium in dit artikel in hoeverre de gevonden benadering van φ bewust ingebouwd, toeval, of het gevolg is van een natuurlijk gevoel voor harmonische verhoudingen.

In het oude Griekenland was de situatie enigszins anders. Er bestaan vele aanwijzingen dat de gulden snede bewust is toegepast in een groot aantal Griekse bouwwerken, zelfs al ver vóór de tijd dat Euclides hierover in zijn *Elementen* schreef (± 300 v.C.). Een





FIGUUR 5



FIGUUR 6

voorbeeld hiervan is de Griekse tempel *Parthenon* (gebouwd rond 450 v.C.), waarin veel lengte-verhoudingen gebaseerd zijn op de gulden snede (zie figuur 5). Overigens is de Griekse letter φ die doorgaans gebruikt wordt om de gulden verhouding aan te duiden afkomstig van de eerste letter van de naam *Phidias*, de beeldhouwer van de sculpturen in en aan het Parthenon.

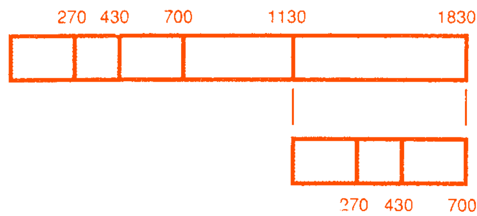
Overwegingen van verhoudingen van met name gehele getallen hebben vooral in de Renaissance, vanaf ± 1500, ook in de bouwkunst een zeer grote rol gespeeld. Dit behoeft geen verbazing te wekken wanneer bedacht wordt dat het teruggrijpen op de klassieke oudheid in het centrum van de belangstelling stond. En juist de Griekse wiskunde en wereldbeschouwing waren gebaseerd op verhoudingen van gehele getallen. Harmonische proporties, gebaseerd op verhoudingen en rijen van gehele getallen, werden dan ook zeer veel toegepast. Het gaat dan om een grote veelheid van soorten getallenrijen en bijbehorende verhoudingen. Vrijwel al deze rijen lijden aan het euvel dat daarbinnen doorgaans geen sprake is van additiviteit. Zo kon een kamer of een zaal, gebaseerd op bepaalde getallenverhoudingen, zeer harmonisch van proporties zijn, maar wanneer verschillende van dergelijke kamers of zalen samen het gebouw vormden was dit gebouw als geheel vaak allerminst harmonisch van opbouw. De getallenrij van Fibonacci daarentegen vertoont wel een additieve opbouw, terwijl het multiplicatieve aspect eveneens aan de orde is wanneer we in relatie met Fibonacci naar de gulden snede kijken. In het begin van dit artikel heb ik daarop al gewezen. Ook vanwege de toepassing in de oude Griekse bouwwerken ligt het daarom voor de hand te veronderstellen dat de gulden snede wel toegepast zou gaan worden. En inderdaad is dat het geval. Ik heb de Dom van Florence al genoemd, maar ook in zeer veel andere bouwwerken uit die periode is de gulden snede te ontdekken. Zie bijvoorbeeld de maatvoering in het vooraanzicht van de *Sint Pieter* in Rome; figuur 6.

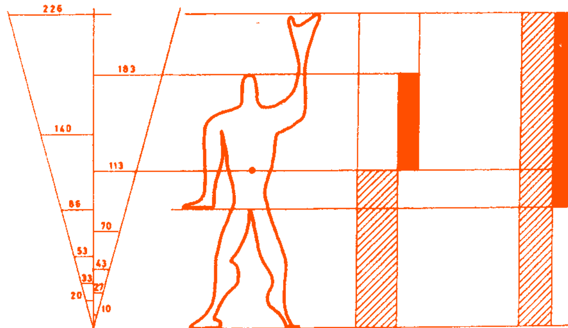
In de 19de eeuw met de opkomst van de romantiek werd de roep om de natuur en natuurlijke verhoudingen erg groot. Terwijl de gulden snede al bij de Grieken (Euclides!) bekend was, en er in de Renaissance een tractaat aan de gulden snede gewijd was (*De Divina Proportia* geschreven in 1509 door Luca Pacioli), ging men de gulden snede niet eerder dan in de 19de eeuw zien als esthetisch ideaal. En het is juist in deze periode dat men de gulden snede overal (in de natuur, in de kunst, in lichaamsvormen enz.) meent terug te vinden. En omgekeerd trachtten velen de gulden snede te pas (en misschien ook wel te onpas) toe te passen, in de veronderstelling dat daarmee voldaan zou zijn aan natuurlijke en 'dus' mooie en harmonische verhoudingen. Dit denken heeft ook latere kunstenaars beïnvloed. In dit verband moet natuurlijk de vermaarde architect Charles Edouard Jeanneret (1887–1965) genoemd worden, die bekend geworden is onder de naam *'Le Corbusier'*. Zijn systeem, gebaseerd op de Fibonacci-eigenschap, staat internationaal bekend onder de naam *Le Modulor*. Corbusier neemt zijn uitgangspunt in de maten van het menselijk lichaam, waarbij hij uitgaat van een lengte van 1830 mm, volgens hem de lengte van een mannelijke Britse politie-officier (!!). Uitgaande hiervan construeert hij nu een meetkundige rij met reden φ:

…, 270, 430, 700, 1130, 1830, 2960, …

Duidelijk is hierin voldaan aan de Fibonacci-eigenschap: 270 + 430 = 700; 430 + 700 = 1130; …

Deze rij heet in de Modulor de *rode rij*. Naast deze rode rij maakt Corbusier nog gebruik van de zg. *blauwe rij*, waarvan de termen het dubbele zijn van die van de





FIGUUR 7

FIGUUR 8, 9

rode rij. Dus:
..., 540, 860, 1400, 2260, 3660, 5920, ...
Zie figuur 7.
Meetkundige rijen hebben, voor architecten, de hinderlijke eigenschap dat zij (te) snel groeien. De Modulor kon hier wat aan doen door de additieve eigenschap van Fibonacci toe te passen: tussen ieder tweetal lengtes die door de rij wordt aangegeven past een rijtje van kleinere lengtes uit de rij (zie figuur 8). Corbusier heeft zijn rijen en de genoemde opvul-eigenschap toegepast in de gebouwen die hij ontworpen heeft (zie figuur 9).

Schilderkunst

Na de muziek en de architectuur kijken we nu naar een kunstvorm die op het eerste gezicht veel minder aan structuurprincipes onderworpen is, de schilderkunst. Veelal hebben we het idee dat de schilder in min of meer grote vrijheid zijn doeken maakt. Uitingen van schilders zoals 'Ik rotzooi maar wat aan' geven hieraan ook wel enige voeding. Maar ook meer serieus gedane uitlatingen laten dit zien. Zo hebben diverse kunstenaars verklaard dat zij net zo lang experimenteren tot er een resultaat bereikt is waarmee zij tevreden zijn. Voor hen is er geen sprake van vooropgestelde bedoelingen, noch van een ingebouwde structuur zoals de gulden snede verhouding. Met name vanuit de overwegingen die in de 19de eeuw opgeld deden, is men dan ook naarstig op zoek gegaan of de gulden snede misschien een bij de mens 'ingebakken' verhouding zou zijn, die door de kunstenaar (al of niet) 'automatisch' toegepast zou worden.
Een paar voorbeelden ter illustratie.

Een compositieanalyse van de *Nachtwacht* van Rembrandt (figuur 10) leert dat wanneer de korte zijkant afgemeten wordt op de diagonalen, deze diagonalen volgens de gulden snede verdeeld worden. Wanneer de deelpunten op de lange zijde geprojecteerd worden, dan spelen de projecterende lijnen een rol in de compositie, namelijk enerzijds de tegenstelling van licht en donker (de personages Ruytenberg en Cocq op het schilderij) en anderzijds het meisje.[2]
(Ik laat nu de geschiedenis van het doek maar in het midden: waarschijnlijk is het huidige schilderij kleiner dan het oorspronkelijke doek doordat van de randen stukken zijn weggesneden.)

Het loont de moeite, ook zelf eens een aantal gulden snede verdelingen in horizontale en verticale richtingen te maken bij bijvoorbeeld het doek *'Les bergers d'Arcadie'* van Nicolas Poussin (figuur 11) en te zien op welke plaatsen deze verdelingen uitkomen in het schilderij.

Gedurende de afgelopen eeuw zijn er zeer veel van dergelijke onderzoeken verricht. Zo heeft Charles Bouleau talloos veel schilderijen vanaf de Middeleeuwen op dit soort kenmerken onderzocht. In zijn boek *'Charpentes, la géométrie secrète des peintres'* doet hij daarvan verslag.
Vanwege de lijnenstructuur in veel van zijn werken ligt het voor de hand dat hij ook de werken van onze landgenoot Piet Mondriaan heeft bestudeerd. Door scherpzinnige redeneringen probeert hij aan te tonen dat er vaststaande structuren aan de abstracte werken van Mondriaan ten grondslag liggen. Mondriaan echter heeft zelf altijd en uitdrukkelijk verklaard dat hij nooit van vaststaande structuren is uitgegaan, maar dat hij door intuïtie en uitproberen tot verhoudingen in zijn werk kwam die hij zelf bevredigend vond. Toch is het opvallend dat ook in het werk van Mondriaan op veel plaatsen punten zijn aan te wijzen waar lijnstukken ongeveer volgens de gulden snede verdeeld worden; zie bijvoorbeeld zijn '*Compositie*' uit 1921 (figuur 12).



FIGUUR 10

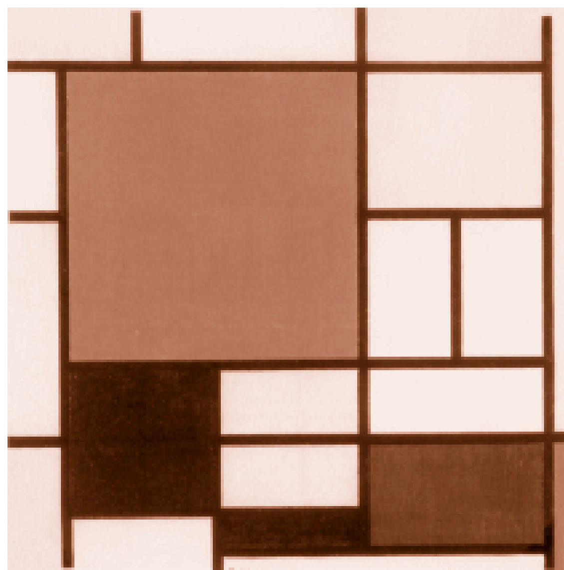
Conclusie

Als titel van dit artikel is gekozen voor 'De gulden snede in de kunst'. We stellen ons nu de vraag of de gulden snede inderdaad in de kunst voorkomt.
We zagen dat slechts in enkele gevallen de desbetreffende kunstenaar expliciet vermeld heeft dat hij de gulden snede daadwerkelijk toegepast heeft. In de meeste situaties was dit niet het geval.
Soms zijn we zaken tegengekomen waarin het hoogst waarschijnlijk is dat de gulden verhouding ingebouwd is. Maar heel vaak ook komen we de gulden snede pas na uitvoerige analyses op het spoor.
Critici zullen wellicht opmerken dat met wat goede wil er overal wel een verhouding van maten te vinden is die aan de gulden snede voldoet. Bovendien, als je bij voorbaat uitgaat van het principe dat de gulden snede bepalend zou moeten zijn voor aangetroffen harmonie, dan vind je altijd wel een punt waar de verdeling volgens de gulden snede uitkomt. Het is vervolgens een kleine stap om dat gevonden punt dan als hét verdelingspunt aan te wijzen (zie Albert van der Schoot, blz. 250).
Daar komt dan nog bij dat studies aangetoond hebben dat een mens op het oog geen onderscheid kan maken tussen rechthoeken die minder dan 6% verschillen in de verhoudingen van hun afmetingen. Dus in het algemeen kan men op het oog geen onderscheid maken tussen $1 : \varphi$ rechthoeken en $1 : 1{,}52$ tot $1 : 1{,}72$ rechthoeken. Critici zullen stellen dat het een kwestie van wishful thinking is dat men de gulden snede vindt. Ongetwijfeld zullen er situaties zijn waar dat het geval is. Maar ik hoop in het voorgaande voldoende voorbeelden getoond te hebben om te kunnen concluderen dat er meer aan de hand is. En deze voorbeelden zijn met vele uit te breiden. Ook wanneer we de 'ronkende' geluiden en standpunten uit de 19de eeuw terzijde schuiven, blijven er meer dan genoeg kunstwerken over waar het overduidelijk is dat de gulden snede en/of de getallen van Fibonacci bewust of onbewust door de kunstenaar zijn verwerkt.
Mijn conclusie is in ieder geval dat de gulden verhouding voor de kunst (maar ook in andere situaties buiten de kunst) fundamenteler is dan eenvoudige 'spielerei', of een hobbyisme van enkele wat mythisch ingestelde onderzoekers. In ieder geval is en blijft dit onderwerp wereldwijd voor velen, waaronder de schrijver van dit artikel, een uiterst fascinerend gebied, dat nogal eens verrassende vergezichten geeft. Of, in de (vertaalde) woorden van Luca Pacioli in zijn voorwoord van zijn tractaat *De Divina Proportione* uit 1509:
'Een voor alle heldere en weetgierige geesten onontbeerlijk werk; waarin elkeen die filosofie, perspectief, schilderkunst, beeldhouwkunst, architectuur, muziek en andere mathematische vakken bestudeert, een aangename, subtiele en bewonderenswaardige geleerdheid zal aantreffen en met genoegen kennis zal nemen van verschillende problemen van de edelste wetenschap.'[3]

Noten

[1] Theo Willemze: Algemene muziekleer, Aula 644, 7de druk, Utrecht (1979), § 727.
[2] F. van der Blij: De meetkunde van de Nachtwacht. In: Wiskunst, publicatie bij de Nationale Wiskundedagen, Freudenthal Instituut, Utrecht (1995), blz. 26.
[3] Prof. dr. Albrecht Beutelspacher, Bernhard Petri: Der Goldene Schnitt, Wissenschaftsverlag, Mannheim (1988), titelpagina (Nederlandse vertaling door drs. G.M.A. Weerts).





FIGUUR 11

FIGUUR 12

Literatuur

- *Prof.dr. Albrecht Beutelspacher, Bernhard Petri: Der Goldene Schnitt. Wissenschaftsverlag, Mannheim (1988).*
- *C. Bouleau: The painter's secret geometry. New York (1980).*
- *Wim Kleijne, Ton Konings: De gulden snede. Zebra-reeks deel 4, Epsilon Uitgaven, Utrecht (2000).*
- *J. Poortenaar: De gulden snede en Goddelijke verhouding. Naarden (1941).*
- *Albert van der Schoot: De ontstelling van Pythagoras, Over de geschiedenis van de goddelijke proportie. Kok Agora, Kampen (1998).*
- *C.J. Snijders: De gulden snede. Amsterdam (1969).*

Over de auteur

Drs. Wim Kleijne (e-mailadres: w.kleijne@owinsp.nl) is wiskundige, oud-docent wiskunde en coördinerend inspecteur van het onderwijs b.d.

Aankondiging / Lesbrief en catalogi bij Bomen van Pythagoras

Mede ter gelegenheid van het vierde lustrum van de Stichting Ars et Mathesis verscheen bij de tentoonstelling 'Bomen van Pythagoras', in het najaar van 2003 gehouden in het Mondriaanhuis te Amsersfoort, een lesbrief bij die tentoonstelling.
Deze lesbrief – en ook de tentoonstelling – bleek bij leerlingen van scholen die de tentoonstelling bezochten, een groot succes.
De lesbrief is geschreven door Aad Goddijn, die werkzaam is aan het Freudenthal Instituut.

De Stichting Ars et Mathesis is bereid deze lesbrief samen met 20 exemplaren van de 71 pagina's tellende catalogus 'De bomen van Pythagoras, Geconstrueerde Groei' aan belangstellende scholen aan te bieden.
De catalogus bevat onder meer 40 in kleur uitgevoerde afbeeldingen van de 40 exposanten op de tentoonstelling, onder wie Joost Baljeu, Ad Dekkers, Popke Bakker, Monika Buch, Gerard Caris, Jos de Mey, Piet van Mook, Rinus Roelofs en Piet van Zon.

De prijs van het lespakket bedraagt € 100,00 (exclusief verzendkosten).

Voor verder informatie en bestelling:
info@arsetmathesis.nl
Website: *www.arsetmathesis.nl*



FIGUUR 1 **Susanna van Steenwijck-Gaspoel, *Gezicht op de Lakenhal*. Niet gesigneerd, gedateerd 1642 op een gevelsteen rechts. Olieverf op doek. 97×119 cm. Stedelijk Museum De Lakenhal, Leiden.**
Foto: Stedelijk Museum De Lakenhal, Leiden

DE LAKENHAL IN PERSPECTIEF

Een historische en meetkundige reconstructie van het ontstaan van een schilderij

[Agnes Verweij]

Inleiding

In het Stedelijk Museum De Lakenhal in Leiden hangt een schilderij (zie figuur 1) dat dit gebouw laat zien zoals het er kort na de ingebruikneming als 'laeken-halle' in 1641 uitzag en zoals het oudste deel van het museum er ook nu nog uitziet.[1] Op de voorgrond van de voornamelijk in lichtbruine en gele tinten uitgevoerde afbeelding[2] is te zien hoe destijds het laken per schuit werd aangevoerd en op kruiwagens naar binnen werd gebracht. Opvallend is de nadruk op de symmetrie van het gebouw door toepassing van de eenpunts-perspectief met het centrale vluchtpunt in het midden. Een mooie vondst is het opzij schuiven van de muur die in werkelijkheid de voorplaats afsluit, om zo de gevels van de hal en de zijgalerijen met hun versieringen die met de lakennijverheid te maken hebben volledig zichtbaar te maken. Eén versiering ontbreekt nog: het beeldje van de volmolen boven de ingang in de voormuur (zie figuur 2).
Dit *Gezicht op de Lakenhal* is in 1642 door Susanna van Steenwijck-Gaspoel geschilderd en aan het stadsbestuur van Leiden verkocht voor 600 gulden, wat voor die tijd een astronomisch bedrag was.
Wie was Susanna van Steenwijck? Hoe kwam deze vrouw in de kleine, door mannen gedomineerde beroepsgroep van architectuurschilders terecht? Waarom wilde het stadsbestuur zo'n kostbaar schilderij van de Lakenhal hebben? En was deze schilderes de aangewezen persoon om dat te maken?
We kunnen de geschiedenis wat dit betreft slechts gedeeltelijk reconstrueren. Wat we wél precies kunnen nagaan, is hoe Susanna van Steenwijck haar kennis van de perspectief heeft gebruikt om de Lakenhal zo aantrekkelijk mogelijk te presenteren.

Susanna van Steenwijck-Gaspoel

Over het leven van Susanna van Steenwijck geboren Gaspoel is weinig met zekerheid te zeggen. Haar geboortejaar en haar geboorteplaats zijn onbekend. Haar familienaam kwam in elk geval in de 16e eeuw in Brugge en in de 17e eeuw in Londen en in Schotland voor.[3] Zeker is dat Susanna trouwde met de bekende Vlaamse architectuurschilder Hendrick van Steenwijck de Jonge, die omstreeks 1580 in Frankfurt of Antwerpen geboren was. Het huwelijk werd waarschijnlijk gesloten in de periode waarin Hendrick in Londen werkte, dat was van 1617 tot circa 1637. Mogelijk heeft het echtpaar zich vanaf 1638 in de omgeving van Den Haag gevestigd. Susanna werkte na 1642, toen ze haar *Gezicht op de Lakenhal* maakte, ook nog in Amsterdam. Ze werd in 1649 als in Leiden woonachtige weduwe geregistreerd; Hendrick was waarschijnlijk niet lang daarvoor overleden. Daarna is Susanna nog enkele jaren als, goed verdienende, schilderes werkzaam gebleven.
Ze is wellicht tot haar dood in Leiden blijven wonen. Daar was in 1656 een Susanna Gaspoel getuige bij de doop van een kind[4] en de heer Rammelman Elsevier, archivaris te Leiden, schreef in 1871 in het tijdschrift De Navorscher (zie [L1]): 'Op den 4 mei 1680 is in de Pieterskerk [te Leiden] begraven Juffr. Steenwijck, uit het Begijnhof. Misschien wordt hiermede de schilderes bedoeld.'

Susanna van Steenwijck, architectuurschilderes

Als Susanna al kon schilderen toen ze met Hendrick trouwde, zijn er twee voor de hand liggende mogelijkheden voor de manier waarop ze dit geleerd had (zie [L2]).
De eerste is dat haar vader of een andere naaste verwant een -ons onbekende- meesterschilder was in wiens atelier zij werd opgeleid. Dit was in het 17e-eeuwse Europa dé manier waarop meisjes in het schildersberoep terecht kwamen. Kinderen uit kunstenaarsfamilies waren namelijk niet onderworpen aan de strenge regels van het gilde ten aanzien van leercontracten, opleidingsduur en opleidingskosten. De hoge kosten die een opleiding bij een vreemde schilder anders met zich meebracht, had men voor een meisje meestal niet over.
De tweede mogelijkheid is dat Susanna's familie tot de gegoede burgerij behoorde die, overeenkomstig het opvoedingsideaal in de Renaissance, voor hun dochters een veelzijdige ontwikkeling van belang vonden. In dat verband volgden de meisjes dan ook lessen van een meesterschilder, meestal in zijn atelier. Misschien heeft Susanna dergelijke lessen wel (in Londen?) gevolgd bij Hendrick van Steenwijck de Jonge en hebben ze elkaar zo leren kennen.
Hoe dan ook, na hun huwelijk heeft Susanna zich in het atelier van haar man (verder) bekwaamd in het schilderen, met name in zijn specialiteit: het architectuurschilderen.[5] Deze specialiteit, waarbij kennis van de perspectief een essentiële rol speelde, was in de 17e eeuw vrij zeldzaam onder mannelijke schilders, bij vrouwen kwam deze bijna nooit voor.

Waarom zo'n kostbaar schilderij van de Lakenhal?

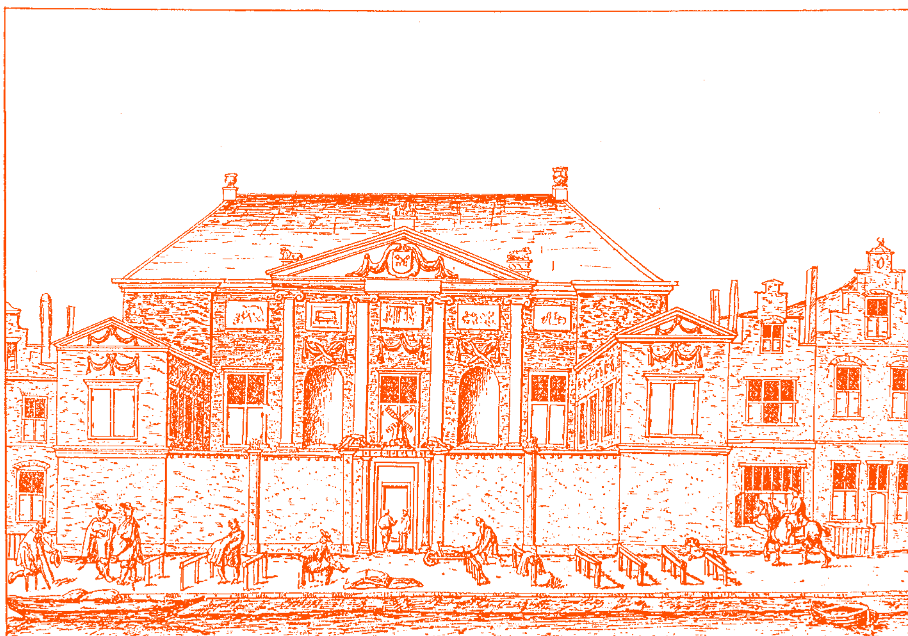
Na een periode van verval was de textielnijverheid in Leiden in de dertiger jaren van de 17e eeuw weer opgebloeid. Uit het *Burgemeesteren- en Gerechts-dagboek van publycque zaken* uit maart 1639 (zie [L4], p. 461-463) blijkt dat de oude lakenhal toen 'niet suffisant ende groot genoech' meer was om het keuren van het Leidse laken nog vlot te laten verlopen. Om de lakenproductie en -handel niet aan concurrerende textielsteden te verliezen, besloot het stadsbestuur een nieuwe lakenhal te gaan inrichten. Hiertoe werden een 'erff ende huysinge' aan de oude Singel aangekocht, die door de stadsbouwmeester Arent van 's-Gravensande geschikt bevonden waren voor realisering van dit plan. Onduidelijk is of de 'huysinge' daarna door Van 's-Gravensande alleen werd verbouwd en verfraaid zoals in het Bouwkundig Tijdschrift van 1885 wordt beweerd, of dat deze vervangen werd door nieuwbouw zoals de meeste andere bronnen suggereren. Duidelijk is wél dat al in juli 1639 een begin is gemaakt met het steenhouwerswerk voor de buitenzijde van de Lakenhal. Daarbij werd gewerkt volgens een bestek waarin ook alle versieringen van de galerijen zoals we die nu kennen, vastgelegd zijn (zie [L5], p. 10-12). Het

is dus niet zo dat het schilderij dat Susanna van Steenwijck enkele jaren later maakte 'een soort ontwerp was voor de galerijen en voorplein, die in 1642 werden aangelegd', zoals de Catalogus van de schilderijen en tekeningen van Stedelijk Museum De Lakenhal uit 1983 vermeldt.
Waarschijnlijk wilden de stadsbestuurders gewoonweg in het stadhuis pronken met een mooi portret van het gebouw waar zij trots op waren. Een schilderij in perspectief was in die tijd het mooiste kunststuk dat men zich kon voorstellen. Enkele jaren later werden ook in andere steden perspectiefschilderijen van monumentale gebouwen voor het stadhuis aangekocht. Bekende voorbeelden zijn het *Gezicht op de Nieuwe Kerk* in Den Haag van Bartholomeus van Bassen uit 1650 en het *Gezicht op het Oude Stadhuis van Amsterdam* van Pieter Saenredam uit 1657. De groep kunstenaars die dit soort architectuurstukken kon maken, was betrekkelijk klein en het was bekend dat men voor hun werk diep in de buidel moest tasten, maar in Leiden bleek dat wel érg diep te zijn. De burgemeesters van Amsterdam betaalden voor het schilderij van Saenredam heel wat minder: geen 600, maar 400 gulden (zie [L6]).

De aangewezen persoon?

Als Susanna van Steenwijck haar *Gezicht op de Lakenhal* werkelijk in opdracht schilderde, zoals wel eens wordt beweerd (bijvoorbeeld in [L2]), dan is de vraag waarom deze opdracht juist aan *haar* gegeven werd. Susanna zal tot die tijd voornamelijk onder de naam van haar man in zijn atelier (mee)gewerkt hebben, zoals dat destijds gebruikelijk was voor een vrouw die (nog) geen erg grote bekendheid had. In totaal zijn (de gegevens van) niet meer dan elf door Susanna gesigneerde of aan haar toegeschreven werken bekend. Het zijn vier kerkinterieurs, twee bijbelse voorstellingen, twee heiligengeschiedenissen, een huiselijk tafereel en twee maal een Gezicht op De Lakenhal, waarvan het tweede waarschijnlijk een variant van het eerste was. Slechts één van deze werken dateert uit de tijd voordat Susanna van Steenwijck aan de eerste versie van het *Gezicht op de Lakenhal* werkte. Het is een schilderij met het interieur van een gotische kerk, gesigneerd en gedateerd 1639, nu aanwezig in Dessau, in de Anhaltische Gemäldegalerie. Het gaat hier om een gefantaseerde kerk, wat dus geen speciale aanbeveling geweest kan zijn voor het verkrijgen van een opdracht om de inmiddels gereed gekomen nieuwe Lakenhal van Leiden 'naar het leven' te schilderen.
Het ligt daarom voor de hand te veronderstellen dat een eventuele opdracht niet aan Susanna persoonlijk, maar aan het atelier van haar man gegeven werd. Hendrick van Steenwijck de Jonge had al een goede staat van dienst opgebouwd op het gebied van perspectief-afbeeldingen van interieurs van bestaande gebouwen. Hij had het vak geleerd van zijn vader, Hendrick van Steenwijck de Oude (1550-1603), die vooral bekend werd doordat hij de eerste was die niet alleen gefantaseerde bouwwerken, maar ook werkelijk bestaande kerkinterieurs in perspectief afbeeldde. De zoon mengde in zijn werk echter, anders dan de vader, de werkelijkheid vaak met fictie.
Het meest waarschijnlijk is dan ook dat het *Gezicht op de Lakenhal* op initiatief van Susanna van Steenwijck of haar man zelf gemaakt is, zoals ook voor het meeste van hun overige werk het geval is geweest. Misschien zijn zij op dit idee gebracht door Arent van 's-Gravensande, die zij mogelijk hebben leren kennen toen hij stadsbouwmeester van Den Haag was, voordat hij in 1638 in dezelfde functie in Leiden benoemd werd (zie [L6]). Wellicht hebben Susanna en Hendrick samen gewerkt aan de opzet van het *Gezicht op de Lakenhal*, maar heeft Susanna uiteindelijk het overgrote deel van het werk gedaan. Zeker is dat Hendrick van Steenwijck

FIGUUR 2 Schets van de Lakenhal te Leiden, 1670. Eerste deel van Plaat II uit het *Bouwkundig Tijdschrift*, jg. 5, 1885.



al een jaar later zelf ook een variant van het schilderij maakte, en signeerde. Zeker is ook dat Susanna het eerste, niet gesigneerde, *Gezicht op de Lakenhal* als haar werk aan het stadsbestuur van Leiden heeft gepresenteerd. Aan haar is volgens het verslag van die presentatie in de Gerechtsdagboeken van Burgemeesteren van 7 augustus 1642 (in [L1]) dan ook, nadat men gedelibereerd had 'of men tselve ten behoeve deser Stede sal aennemen of niet', de 600 gulden die ze ervoor vroeg, uitbetaald.

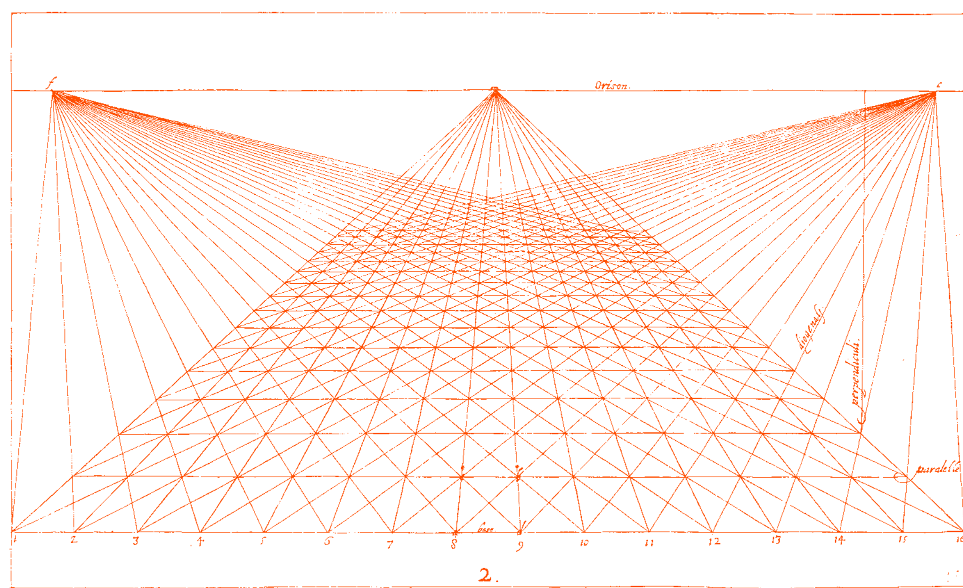
Een schets als basis?

Van de werkwijze van de Van Steenwijcks bij het schilderen van bestaande gebouwen is niets bekend. Waarschijnlijk hebben zij eerst ter plaatse een schets gemaakt, waarvan de perspectief later in het atelier aan de hand van zelf bepaalde of uit bouwtekeningen afgelezen meetgegevens van het gebouw door constructie verbeterd werd. Van Pieter Saenredam, die zich vanaf 1628 op de architectuurschilderkunst toelegde en die Hendrick van Steenwijck de Jonge gekend zou kunnen hebben, is bekend dat hij zo te werk ging (zie [L7]).
De schets die als basis voor het schilderij van Susanna van Steenwijck gediend zou hebben, kan er zo ongeveer uitgezien hebben als de schets uit 1670 die in figuur 2 is weergegeven. Een verschil is dat de maker van deze schets een lager en verder weg gelegen standpunt ingenomen heeft dan Susanna. Na verbetering van de perspectief van deze schets zou het niet moeilijk zijn om hierin, net als in het schilderij, de muur naar rechts te schuiven en de voorplaats met betegeling te construeren. Hiermee wordt dan ook de plaats van de kolommen van de galerijen in de tekening vastgelegd, die echter in de schets ongemakkelijk dicht bij elkaar zouden komen te staan. Bij de constructie wordt gebruik gemaakt van het centrale vluchtpunt en van de vluchtpunten van de diagonalen van de voorplaats, die ook de vluchtpunten zijn van de diagonalen van de 5 maal 5 vakken waarin de voorplaats door de betegeling verdeeld was (en nog steeds is). We kunnen er zeker van zijn dat Susanna van Steenwijck deze methode toepaste, een methode die bijvoorbeeld af te leiden is uit het in 1604/1605 uitgegeven boek *'Perspective'* van Hans Vredeman de Vries, de leermeester van haar schoonvader; zie bijvoorbeeld figuur 3.

Het schilderij goed bekeken

Voor het *Gezicht op de Lakenhal* geldt, zoals voor iedere afbeelding in lineair perspectief, dat deze in theorie verkregen wordt door vanuit een vast punt met één oog door een doorzichtig vlak scherm, het tafereel, naar het af te beelden driedimensionale object te kijken en wat men ziet punt voor punt op het scherm 'over te trekken'. In feite worden zo de snijpunten met het tafereel bepaald van kijklijnen vanuit dat ene oog naar de punten van het object. Daarom kan de afbeelding het beste zo bekeken worden dat de eigen kijklijnen samenvallen met die van de maker ervan, dus ook met één oog kijkend vanuit hetzelfde vaste punt.
Om dat punt bij het schilderij van Susanna van Steenwijck terug te vinden, doen we nu even alsof zij inderdaad met een tafereel gewerkt heeft. Dat tafereel was dan, om 'eenpunts'-perspectief te verkrijgen, evenwijdig met de voorgevel van de Lakenhal opgesteld, zodat alleen die hoofdlijnen van het gebouw die loodrecht op de voorgevel staan in de afbeelding op het tafereel een vluchtpunt, het 'centrale' vluchtpunt, hebben. In figuur 4 is een bovenaanzicht geschetst van de voorplaats *KLMN* met de galerijen van de Lakenhal, het tafereel en het oog *O* van de schilderes (niet met de juiste onderlinge verhoudingen). In de figuur zijn ook enkele belangrijke kijklijnen getekend, waaronder die naar het centrale vluchtpunt *P* en het punt *Q*, dat het vluchtpunt is van diagonaal

FIGUUR 3 Plaat 2 uit Hans Vredeman de Vries, *Perspective*, deel I, 1604.



KM van de voorplaats en de met *KM* evenwijdige diagonalen van de tegels waarmee de voorplaats belegd is. Omdat het vluchtpunt van een lijn het perspectiefbeeld is van een 'oneindig ver' achter het tafereel gelegen punt van die lijn, heeft kijklijn *OP* dezelfde richting als de lijnen waarvan *P* het vluchtpunt is en staat *OP* dus loodrecht op het tafereel. Op dezelfde manier kan uitgelegd worden dat *OQ* evenwijdig is met *KM*. (Zie voor een uitgebreidere toelichting [L8] of [L9]). De driehoeken *OPQ* en *KNM* zijn dus gelijkvormig. Noemen we de 'distantie', dat is de afstand van het oog tot het tafereel, *d* en is *a* de breedte en *b* de diepte van de voorplaats, dan volgt:

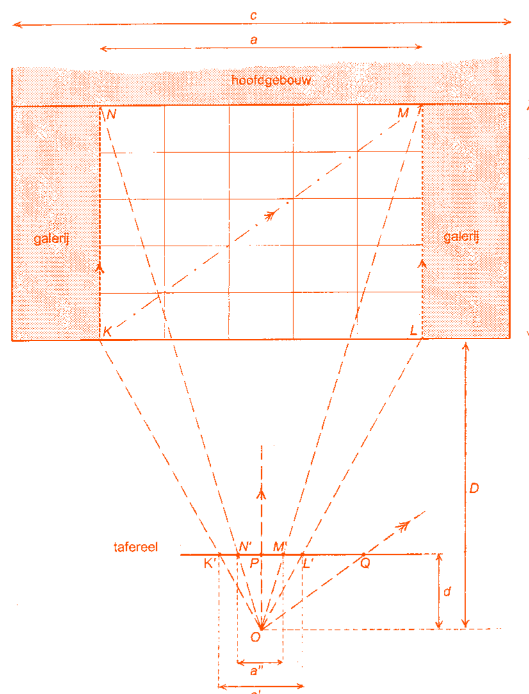
$$d = \frac{b}{a} PQ.$$

In een kopie van het schilderij, bijvoorbeeld in figuur 1, kunnen de vluchtpunten *P* en *Q* gemakkelijk bepaald worden. Met behulp van de werkelijke afmetingen van het schilderij, 119 cm breed en 97 cm hoog, vinden we dan $PQ \approx 60$ cm.
Om de distantie te kunnen berekenen hebben we nu alleen nog de verhouding van de diepte en de breedte van de voorplaats of zijn tegels nodig. Zouden we van het gebouw niets méér weten dan wat op het schilderij te zien is, dan ligt het voor de hand uit te gaan van vierkante tegels, zodat $a = b$. In het nummer van het Bouwkundig Tijdschrift uit 1885 waarbij de schets van figuur 2 als illustratie is opgenomen, heeft men dat ook gedaan. Daarin lezen we: 'de vloer was als parket verdeeld in vierkante vakken van geelen steen, in het midden der vakken lag een vierkante blauwe tegel' (zie [L5], p. 12). Dan zou de distantie *d* dus evenals *PQ* ongeveer 65 cm zijn.
De vakken en de tegels van de voorplaats waren echter niet vierkant. Dit blijkt om te beginnen uit de beschrijving van de Lakenhal uit 1641 door de Leidse oud-burgemeester en geschiedschrijver Orlers, die vermeldt dat de voorplaats 44 voeten breed en 36 voeten diep is (zie [L3]), wat een distantie van ongeveer 53 cm zou opleveren. Nu het gebouw er nog staat, kunnen we de voorplaats ook gewoonweg zelf nameten. Een (Rijnlandse) voet is 0,314 meter lang, dus als de gegevens van Orlers juist zijn, zouden we een breedte van bijna 14 meter en een diepte van ruim 11 meter moeten vinden. De voorplaats blijkt echter iets breder en wat minder diep te zijn: ongeveer 14,8 meter bij 10,7 meter. Op basis hiervan vinden we $d \approx 47$ cm, wat een prettige afstand is voor iemand die bezig is op een tafereel aan te geven wat hij ziet.
Voor ons betekent deze uitkomst dat we het schilderij het beste vanaf een afstand van bijna een halve meter, vanuit een punt recht tegenover het centrale vluchtpunt, met één oog, kunnen bekijken. Helaas hangt het schilderij in het huidige Museum De Lakenhal zo hoog dat dit niet gemakkelijk uitvoerbaar is. Bekijken we in plaats daarvan een niet te kleine kopie van het schilderij (bijvoorbeeld een vergroting van figuur 1) vanuit het daarbij passende 'juiste' gezichtspunt, dan is het verrassend hoe mooi we 'diepte' in de voorstelling zien. We merken dan ook dat het lijkt alsof we naar het gebouw van de Lakenhal kijken vanuit een punt ter hoogte van het raam van de eerste verdieping, niet zittend of staand boven in een huis aan de overkant zoals voor de hand zou liggen, maar boven het water van de Oude Singel!

Verschillende gezichtspunten

Van welke afstand de Lakenhal in werkelijkheid bekeken zou moeten worden om het gebouw te zien zoals dit door het schilderij getoond wordt, kunnen we ook berekenen. Daarbij hebben we nu geen vluchtpunt van diagonalen nodig.
We kijken nogmaals naar figuur 4 en letten vooral op de afstand *D* tussen het oog *O* en de voorzijde van de voorplaats in bovenaanzicht en op de breedte *a*' van de

FIGUUR 4 Schets van het bovenaanzicht van de voorplaats en galerijen van de Lakenhal met tafereel, oog en kijklijnen.



voorzijde en de breedte a'' van de achterzijde van de afbeelding van de voorplaats op het tafereel. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $OK'L'$ en OKL volgt dat $d : a' = D : a$ en uit de gelijkvormigheid van $OM'N'$ en OMN volgt dat $d : a'' = (D + b) : a$. Eliminatie van d uit deze twee betrekkingen geeft

$$D = \frac{a''}{a' - a''} b$$

Nu meten we a' en a'' in willekeurig welke kopie van het schilderij (bijvoorbeeld in figuur 1), vullen in de formule de gevonden meetwaarden en de werkelijke diepte b van de voorplaats, 10.7 meter, in en vinden zo: $D \approx 19$ meter. De straat voor de Lakenhal is momenteel ongeveer 10 meter breed, het water van de Oude Singel is circa 20 meter breed en de straat aan de overzijde van de Oude Singel is 7 meter breed, dat is samen 37 meter. De voorplaats is dus inderdaad afgebeeld zoals deze, niet van achter het raam van het huis aan de overzijde, maar vanuit een punt hoog boven het water te zien zou zijn, áls de voormuur inderdaad weggeschoven zou kunnen worden.
We kunnen in de laatste formule a' en a'' ook vervangen door respectievelijk de breedte c' van de voorzijde van de voorplaats en de galerijen samen en de breedte c'' van de hele voorgevel van het hoofdgebouw van de Lakenhal in een kopie van het schilderij. In werkelijkheid zijn deze afmetingen gelijk; zie c in figuur 4. Zo krijgen we, vreemd genoeg, een andere uitkomst: $D \approx 30$ meter. Deze afstand correspondeert met een tweede gezichtspunt, verder weg dan het eerste, aan de kade aan de overzijde van het water, maar toch altijd nog een straatbreedte dichterbij dan de voorgevel van het huis tegenover de Lakenhal.[6]

Seer curieus en konstich

Wat heeft Susanna van Steenwijck dus gedaan? Zij is in haar schilderij bewust afgeweken van wat zij zag, en waarschijnlijk ook schetste, vanuit een bovenraam van het recht tegenover de Lakenhal gelegen huis. Ze heeft de voorplaats en de galerijen afgebeeld vanuit een fictief, hoog en dichtbij gelegen gezichtspunt boven het water om de betegeling, de kolommen en de versiering van de aan de voorplaats grenzende zijden van de galerijen goed uit te laten komen. Verder heeft ze de voorgevel van het hoofdgebouw naar verhouding te breed gemaakt, breder dan de achterzijden van de voorplaats en galerijen samen. Dat is ook duidelijk te zien als we in figuur 1 naar de achterzijde van de vloeren van de galerijen kijken. Susanna heeft het hoofdgebouw zoveel verbreed dat de verhoudingen in de voorgevel ervan niet al te veel afwijken van de werkelijke verhoudingen, terwijl toch een gezichtspunt gesuggereerd wordt dat niet erg veel dichterbij is dan het bovenraam van het huis aan de overkant. Samen met het brutaalweg opzij schuiven van de voormuur is dit alles een knap staaltje manipulatie van de werkelijkheid om die werkelijkheid mooier te presenteren. Het is dan ook niet verwonderlijk dat de burgemeesters van Leiden volgens hun Gerechtsdagboeken in 1642 van mening waren dat Susanna van Steenwijck de Lakenhal 'seer curieus en konstich' had afgebeeld en dat zij niet hebben geprobeerd ook maar iets op haar vraagprijs af te dingen.

Noten

[1] Het gebouw is sinds 1870 in gebruik als stedelijk museum. Het werd in 1888 aan de achterkant en in 1921 aan de kant van de opzij geschoven muur in het schilderij uitgebreid. In 1991 werd de voorplaats overkapt.
[2] Het schilderij werd in 1990 met zwarte acrylverf beklad; daarvan is nu gelukkig niets meer te zien.
[3] I am very grateful to Jeremy Howarth, Buckingham, UK, who kindly supplied me with these and a lot of other details related to the life and works of Susanna van Steenwijck and her husband.
[4] De dopeling was Isaac de Vogel. Zie http://members.lycos.nl/jouvries/vogel.html.
[5] Volgens Bénézit, schrijver van een bekend kunstenaarslexicon uit het begin van de 20e eeuw, bereikte zij 'natuurlijk' niet het niveau dat de werken van haar man kenmerkt.
[6] Dezelfde metingen en berekening geven voor de schets van figuur 2: D ≈ 45 meter, waarbij het in dat geval niet uitmaakt of we daarvoor a' en a" of c' en c" gebruiken. Dit betekent dat de schets overeenkomt met een standpunt dat circa 8 meter verder van de voormuur van de Lakenhal verwijderd is dan de huizenrij aan de overzijde van het water. Ook dat is geen erg voor de hand liggend standpunt.

Literatuur

[L1] W.J.C. Rammelman Elsevier: 'Susanna van Steenwijck, schilderes te Leiden ao 1642'. In: De Navorscher, jg. 21, nieuwe serie jg. 4, 1871, p. 188.
[L2] Els Kloek, Catherine Peters Sengers, Esther Tobé, red.: Vrouwen en kunst in de Republiek: een overzicht. Reeks: Utrechtse Historische Cahiers, jg. 19 nr. 1-2, Hilversum: Verloren, 1998.
[L3] Jan Jansz. Orlers: Beschryving der stad Leyden: behelzende het begin, den voortgang en aanwas van die stad, (...). 3e druk, naar de editie van 1641. Leyden: bij Cornelis Heyligert, 1781.
[L4] Frans van Mieris: Beschryving der stad Leyden (...). Tweede deel, bevattende de wereldlyke gebouwen en de ambachtsheerlykheden. Te Leyden: by de weduwe Abraham Honkoop, 1762-1784.
[L5] W. Pleyte: 'De Lakenhal te Leiden'. In: Bouwkundig Tijdschrift, jg. 5, 1885, p. 9-15 en plaat II.
[L6] Jeroen Giltaij, Guido M.C. Jansen (samenstellers): Perspectiven: Saenredam en de architectuurschilders van de 17e eeuw, 15/9-24/11/1991. Tentoonstellingscatalogus. Rotterdam: Museum Boymans-van Beuningen, 1991.
[L7] A. Verweij: 'Perspectiven'. In: Euclides, jg. 67 nr. 1, september 1991, p. 8-14.
[L8] Agnes Verweij, Martin Kindt: Perspectief, hoe moet je dat zien? Utrecht, Epsilon Uitgaven, 1999.
[L9] A. Verweij: 'Perspectief in een kastje'. In: Nieuwe Wiskrant, jg. 21 nr. 2, december 2001, p. 6-16.

Over de auteur

Agnes Verweij (e-mailadres: A.Verweij@ewi.tudelft.nl) is als docent wiskunde en didactiek van de wiskunde verbonden aan de Technische Universiteit Delft.

HET ROMANTISCH ONGENOEGEN MET DE REDE

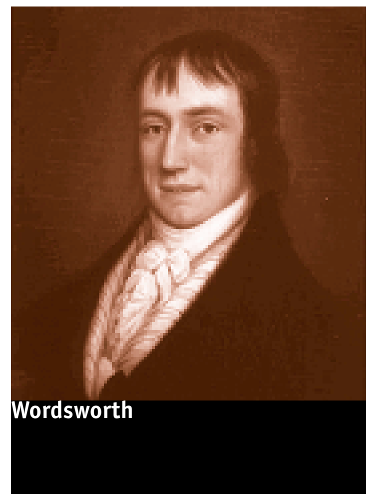
[Aad Goddijn]



Ter inleiding

Wij willen het maar al te graag geloven: wiskunde staat heel dicht bij de kunsten, is er misschien wel de bron van. Begon de beeldende kunst niet met een patroon op een aardewerk beker, met wiskunde dus? Leidde de belangstelling voor de meetkunde in de 15e eeuw niet tot het ontdekken van het perspectief door Brunelleschi, Alberti en anderen? Hadden wíj niet van meet af aan abstractie en elementaire vorm in ons hart gesloten vóór Mondriaan en Malewich ze schilderend herontdekten?
Het lijstje is gemakkelijk langer te maken, maar wat blijft opvallen is het evident ontbreken van de 19e eeuw. Het lijkt erop dat in de 19e eeuw niet veel kunst tot stand kwam waaraan wiskunde een wezenlijke bijdrage leverde. Sterker nog: het is betrekkelijk makkelijk, in de literatuur van de vroeg-Romantiek – een korte periode rond het jaar 1800 – uitingen van openlijk verzet aan te wijzen tegen alles wat exact is. Verzet tegen de regels van de rechte lijn, tegen berekening en analyse, verzet tegen de Rede zelf. De dichters die zo dadelijk hierover aan het woord komen, horen tot de literaire canon in de betreffende taalgebieden. Hun bedenkingen zijn nog steeds te horen, zij het wat misvormd tot vooroordelen over wiskunde en wetenschap.
Is dat erg? Kom mee, lezer van wiskundetijdschrift Euclides, stap eerst eens in de Romantiek!

De steen en de schelp: William Wordsworth


Wordsworth

William Wordsworth (1770-1850) is dé romantische dichter van het Engelse Lake District. Wordsworth moet een groot deel van zijn omvangrijk oeuvre wandelend hebben geschapen. Veel titels verwijzen naar locaties in het Lake District. Volgens vrienden liep hij in zijn leven zo'n 300 000 km; gedichten werden na afloop van lange wandelingen genoteerd door zijn zuster Dorothy, zijn vrouw Mary, eventueel door Wordsworth zelf. Zijn band met Nature – hoofdletter, als werd er een Goddelijk Wezen aangesproken – was intens en kende momenten van mystieke diepte. Deze bekentenis is een van de vele:



> To me the meanest flower that blows can give
> Thoughts that do lie too deep for tears.[1]

The Prelude (1805, revisie 1835, uitgegeven 1850) is Wordsworths autobiografie in verzen, over de ontwikkeling van een kleine jongen tot een grote dichter met een uitgesproken filosofie over de natuur. In *Boek V* vertelt Wordsworth dat hij in een grot aan zee ligt, mijmerend over:



poetry and geometric truth,
And their high privilege of lasting life

Het thema is aangekondigd, het verschijnt vervolgens in een droom, waarin een Arabier nadert op een kameel. Onder de ene arm houdt deze een steen, onder de andere een schelp. De dromer hoopt een gids in de woestijn te hebben gevonden, maar het is anders:



the Arab told me that the stone
(To give it in the language of the dream)
Was "Euclid's Elements," and "This," said he,
"Is something of more worth"; and at the word
Stretched forth the shell, so beautiful in shape,
In colour so resplendent, with command
That I should hold it to my ear.

Steen en schelp zijn de twee boeken die bij de naderende ondergang van de wereld gered zullen worden, aldus de Arabier. Het immense belang van de *Elementen* van Euclides:


Novalis



The one that held acquaintance
with the stars,
And wedded soul to soul in
purest bond
Of reason, undisturbed by space
or time;

Daartegenover de stemmen van de poëzie, die uit de schelp stromen:



The other that was a god, yea
many gods,
Had voices more than all the
winds, with power
To exhilarate the spirit, and to
soothe,
Through every clime, the heart
of human kind.

Harde steen of kwetsbare schelp, inzicht of troost, rede of hart, meetkunde of poëzie.
De schelp is 'more worth', aldus de door Wordsworth geconstrueerde droom.
Wordsworth wist heel wel wat hij de tweede plaats gaf. In het museum in Wordsworths huis in Grasmere (in het Lake District uiteraard) ligt de lijst van boeken die zijn vader bezat; de lijst is in Williams handschrift. De *Don Quichot* van Cervantes was er, die Wordsworth herhaaldelijk in *The Prelude* vermeldt. De *Elementen* van Euclides waren er ook, vermoedelijk in de vertaling van Simson, die met 26 drukken tussen 1756 en 1844 vast een fors marktaandeel bezat.
William werd naar Hawkshead Grammar School gestuurd, een 'boarding school' die beroemd was om de kwaliteit van het wiskundeonderwijs. Van nu uit hulde voor headmaster James Peake van Wordsworth in Hawkshead, die in een lokaal van 7 bij 12 meter 100 jongens van zes leeftijdsklassen voor zich had en ze opleidde van de eenvoudigste Latijnse declinaties naar Horatius en van het ondeelbare punt in definitie 1 naar propositie 33 van *Elementen VI*.

Weg met getallen en figuren: Novalis

De levensloop van de dichter Novalis (1772-1801) is de Romantiek zelf. Een eenheid van oneindig liefdesverdriet, diepe vriendschap en extase binnen de door een longziekte krap gehouden jaren. In 1794 ontmoet hij de twaalfjarige Sophie Kühn. In een brief aan zijn broer schrijft Novalis dat toen in een kwartier over zijn leven beslist werd. Sophie overlijdt in 1797. Novalis had haar graag willen 'nachsterben', maar overleeft de schok en schrijft zijn Bildungsroman *Heinrich von Ofterdingen*. Daarin trekt een middeleeuwse jongeling door de wereld, op zoek naar het paradijs van zijn dromen. Novalis geeft zijn belangrijkste ideeën over de verhouding natuur-mens-poëzie erin vorm, eigenlijk net als Wordsworth in *The Prelude* doet. De 'Heinrich' bevat ook autobiografische elementen, maar is tegelijk evident utopisch; utopisch in de zin dat de mens zijn ware zelf in de spiegel van de Natuur moet terug vinden, waarbij dit diepe kennen alleen via de poëzie bereikbaar is.
In het eerste deel van de roman laat Novalis de wijze Klingsohr een sprookje vertellen. Dat zit vol symboliek, mythe, magie, astrologie. Fabel en Eros - let op de namen - zijn er hoofdfiguren, die aanvankelijk in kindergedaante spelend aanwezig zijn. Wat zij in hun kinderlijke wijsheid op papier tekenen of schrijven, kan de toets van 'Sophie' doorstaan, een fee-achtige vrouw die al wat geschreven is in een schaal klaar water dompelt om de waarde ervan vast te stellen. De 'Schreiber', een vreemde bijfiguur, komt er slechter van af. Hij krijgt al zijn schrijfwerk gewist terug, het water in de schaal is onverbiddelijk. Het water laat met schitterende magie ook zien wat de Schreiber bezielt:



Die Frau wandte sich zuzeiten gegen Ginnistan und die Kinder, tauchte den Finger in die Schale, und sprützte einige Tropfen auf sie hin, die, sobald sie die Amme, das Kind, oder die Wiege berührten, in einen blauen Dunst zerronnen, der tausend seltsame Bilder zeigte, und beständig um sie herzog und sich veränderte. Traf einer davon zufällig auf den Schreiber, so fielen eine Menge Zahlen und geometrische Figuren nieder, die er mit vieler Emsigkeit auf einen Faden zog, und sich zum Zierat um den magern Hals hing.

De vastgeregen *Zahlen und Figuren* staan diametraal tegenover de blauen Dunst, en de tausend seltsame Bilder die steeds vrij veranderen. De afkeur voor de starre overijverige Schreiber is evident.

De roman is onvoltooid; voor deel II zijn alleen aantekeningen bekend en een beschrijving door Novalis' vriend Ludwig Tieck. Daar vinden we onder andere dit in Duitsland alom bekende gedicht:



Wenn nicht mehr Zahlen und Figuren
Sind Schlüssel aller Kreaturen
Wenn die so singen, oder küssen,
Mehr als die Tiefgelehrten wissen.
Wenn sich die Welt ins freie Leben
Und in die Welt wird zurückbegeben,
Wenn dann sich wieder Licht und Schatten
Zu echter Klarheit werden gatten.
Und man in Märchen und Gedichten
Erkennt die wahren Weltgeschichten,
Dann fliegt vor Einem geheimen Wort
Das ganze verkehrte Wesen fort.

Meeslepend voor wie het geloven wil: het paradijs staat voor ons open, als we getallen en figuren maar achter ons laten. De Tiefgelehrten weten niet wat singen oder küssen is; echte Klarheit en Freiheit komen van elders: uit sprookjes en gedichten.
In Novalis' aantekeningen voor het sprookje staan deze woorden:



Der Liebe in der Wiege - die Träume. (Ihre Wohnung - das mensliche Gemüt.) Vernunft – Phantasie. Verstand. Gedächtnis. Herz. (Der Verstand ist feind-selig – er wird verwandelt.)[2]

Novalis was bevriend met Friedrich Schlegel, die in zekere zin de 'theoreticus' van de vroege Duitse Romantiek is. Volgens Schlegel moet poëzie 'Universalpoesie' zijn, tegelijk filosofisch, mythologisch, ironisch en religieus. Aan Schlegel legt Novalis de bedoeling van zijn sprookje in een brief uit:



Die Antipathie gegen Licht und Schatten, die Sehnsucht nach klaren, heißen, durchdringenden Äther, das *Unbekanntheilige*, die Vesta in Sophien, die Vermischung des Romantischen aller Zeiten, der petrifizierende und petrifizierte Verstand, Arctur, der Zufall, der Geist des Lebens, einzelne Züge bloss, als Arabesken – so betrachte nun mein Märchen.[3]

Nee, we misinterpreteren niet, als we onder de verleidelijke oppervlakte ook een aanval op rationaliteit (der petrifizierende und petrifizierte Verstand) in de gedaante van wiskunde (Zahlen und Figuren) zien. Die aanval was vast niet Novalis' hoofdbedoeling; dat is uit de hier gegeven fragmenten wel duidelijk, het gaat Novalis om de rol van de poëzie. Maar het afwijzen van 'Zahlen und Figuren' is blijkbaar nuttig binnen het poëtisch-mythologisch-allegorisch-filosofisch betoog.
Novalis studeerde in Jena in 1790 een jaar lang rechten, literatuur, filosofie en wiskunde. Schiller heeft daar vooral grote indruk op hem gemaakt. Later verdiept hij zich nog in scheikunde, natuurkunde, geologie, mineralogie en mijnbouw. Hij moet goed geweten hebben wat de doorsnee wetenschapper aan het eind van de 18e eeuw voornamelijk bezig hield: ontleden, classificeren. In enkele zinnen maakt Novalis er zijn karikaturale 'Schreiber' van.

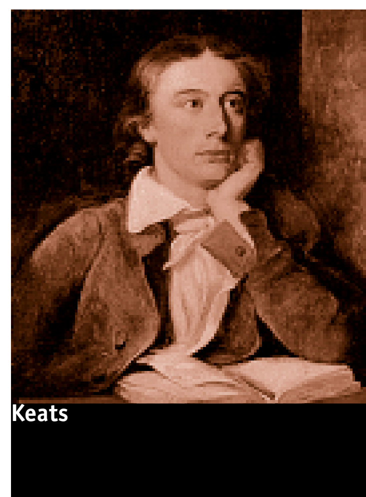
Red de regenboog: Keats en Goethe

John Keats (1795-1821) is alom bekend om de eerste regel van dit fragment uit *Endymion*:



A thing of beauty is a joy for ever:
Its loveliness increases; it will never
Pass into nothingness; but still will keep
A bower quiet for us, and a sleep
Full of sweet dreams, and health, and quiet breathing.

Keats bewonderde Wordsworth en schatte hem hoger dan de illustere John Milton (1608 - 1674) van *Paradise Lost*: '[Milton] did not think into the human heart, as Wordsworth has done'.
Keats en Wordsworth zien elkaar (met anderen) op 28 december 1817, tijdens een diner bij de schilder Benjamin Haydon (1786-1846) in Londen. De dichter Charles Lamb (1775-1834) is er ook. In de memoires van de gastheer wordt deze beschreven als na enige tijd 'delightfully merry'. Lamb haalt fors uit tegen Newton:


Keats



'who believed nothing unless it was as clear as the three sides of a triangle'.[4]

Keats beschuldigde daarop Newton ervan, de poëzie van de regenboog te hebben vernield, door deze te reduceren tot de kleuren waarin een prisma licht splitst. Er wordt getoast op



'Newton's health, and confusion to mathematics'.[4]

Wordsworth lacht ogenschijnlijk gretig mee; hij had wél bewondering voor Newton, al in zijn schooljaren in Hawkshead. Zijn beschrijving van het standbeeld van Newton in Cambridge in *The Prelude*, boek V, mag hier dan ook niet ontbreken:



And from my pillow, looking forth by light
Of moon or favouring stars, I could behold
The antechapel where the statue stood
Of Newton with his prism and silent face,

The marble index of a mind for ever
Voyaging through strange seas of Thought,
alone.

In Keats' verhalende gedicht *Lamia* (1818) verschijnt de bedreigde regenboog in een 'terzijde'.
Lamia, afkomstig uit een tamelijk obscure Griekse mythe, is zowel slang als vrouw, ze kan naar eigen keuze beide vormen aannemen. Als ze liefde opvat voor Lycius, legt ze haar prachtige veelkleurige slangengestalte af. Snel komt het tot een huwelijk, maar Lamia wil niet dat Lycius zijn leraar, de filosoof Apollonius, daarbij uitnodigt omdat ze die niet vertrouwt wegens zijn doordringende blik. Deze komt echter wél, en ontmaskert dan Lamia, die naar haar reptielvorm terugschrompelt. Over Apollonius' gedrag dit fragment:



Do not all charms fly
At the mere touch of cold philosophy?
There was an awful rainbow once in heaven:
We know her woof, her texture; she is given
In the dull catalogue of common things.
Philosophy will clip an Angel's
wings,
Conquer all mysteries by rule
and line,
Empty the haunted air, and
gnomèd mine -
Unweave a rainbow, as it
erewhile made
The tender-personed Lamia melt
into a shade.

Goethe

Keats neemt het op voor betovering en mysterie, die door rule and line en koude wetenschap worden vernietigd. Zelfs terwijl die wetenschap van Apollonius overduidelijk gelijk heeft: Lamia wás een monster en een gevaar voor Lycius, dit wordt zo ook door Keats beschreven.

Newtons ontrafeling van de regenboog werd al door Goethe (1749-1832) in 1790 aangepakt. Goethe schreef uiteindelijk zijn *Zur Farbenlehre*, die nadrukkelijk ingaat gericht tegen Newtons geometrische *Optica*. Goethe probeert met eigen experimenten Newton te weerleggen. Twee heel verschillende fragmenten, het ene polemisch met de kern van de kritiek op Newton en een spoor van Goethes eigen theorie erin, het andere ontegenzeggelijk poëtischer en kleurrijker dan een 'modern' natuurkundeboek durft te zijn:



Ich sah die Erscheinungen der Natur in offner Welt, und brauchte nicht erst einen zwirnsfädigen Sonnenstrahl in die finsterste Kammer zu lassen, um zu erfahren, dass hell und dunkel Farben erzeuge.

Als aber die Sonne sich endlich ihrem Niedergang näherte und ihr durch die stärkeren Dünste höchst gemässigter Strahl die ganze mich umgebende Welt mit der schönsten Purpurfarbe überzog, da verwandelte sich die Schattenfarbe in ein Grün, das nach seiner Klarheit einem Meergrün, nach seiner Schönheit einem Smaragdgrün verglichen werden konnte.

Het verzet tegen de Verlichting

De milde Wordsworth, de overbegeesterde Novalis en de kritische Keats geven typische voorbeelden van het Romantisch verzet tegen de Verlichting, de 17e en 18e eeuwse beweging die de rede als enig leidsnoer kiest om de wereld te begrijpen en de menselijke conditie te verbeteren. De Verlichte wetenschapper omarmde de wiskunde als onderzoeksmiddel bij uitstek en modelleerde zijn exposé nog graag naar het voorbeeld van Euclides: uitgaan van grondwaarheden, de atomen van de kennis als het ware, om van daaruit ware en zekere proposities stuk voor stuk af te leiden. Zo leidde Newton de ellipsbaan van de planeetbeweging af uit slechts enkele bewegingsprincipes, en kon hij de bewegingen van zon, maan en planeten daarmee nauwkeurig in detail voorspellen.
De Romantici zetten forse vraagtekens bij deze werkwijze als geheel.

De Romanticus weigert in ieder geval de wereld als een grote klok te zien, waarvan de werking mathematisch voorspelbaar was. Voor de Romanticus is de natuur een bezield wezen. De idealistische Novalis zegt dat heel expliciet, bij Wordsworth blijkt het vaak indirect uit de manier van weergeven van de eigen individuele reactie op 'Nature'.
De Romanticus is *antimechanistisch* en wil zeker ook niet de processen in de natuur en in de mens afzonderlijk als onafhankelijk machinale werkingen beschouwen.

Nauw hiermee hangt de *Unbekanntheiligung* samen, die we in de aantekeningen van Novalis aantroffen. Het onvoorspelbare, het eeuwig onbereikbare, de verte: daar ligt wat het waard maakt te leven en te sterven. Wat eenvoudig te verklaren is, dat kan niet de diepste werkelijkheid zijn. Mysterie moest er zijn en werd in alles gezocht. 'Conquer all mysteries by rule and line', het was Keats een gruwel. Juist de wiskunde met zijn hang naar berekenbaarheid en begrijpbaarheid lag hier onder vuur.

Wetenschappelijke analyse, ook van de wiskunde, ervaart de ware Romanticus vooral als destructieve uiteenrafeling, als bedreiging van de harmonische werking en beleefbaarheid van het geheel der dingen. De Romanticus is *anti-reductionist*. De ontleding van de regenboog was een modelvoorbeeld hiervan.

Een ander verwijt treft de vermeende *arrogantie* van de wiskundige georiënteerde wetenschapper. Keats zei het al: ze komen overal aan met hun regels en lijnen. Goethe, over het gilde van de wiskundigen in het bijzonder:



Die Mathematiker sind wunderliche Leute:
durch das Großes, was sie leisteten, haben sie
sich zur Universalgilde aufgeworben und
wollen nichts anerkennen, als was in ihren
Kreis paßt, was ihr Organ behandeln kann.[5]

Kortom: wat niet wiskundig kan worden behandeld bestaat gewoon niet voor ze.

Het belangrijkste bezwaar tegen wiskunde en wetenschap van de Romanticus is echter wel: *de Verbeelding verhongert*. In tamelijk naïeve vorm treffen we het idee al aan in een brief uit 1791 van Samuel Coleridge (1772-1834) aan zijn broer. Coleridge schreef overigens later (in 1798) samen met Wordsworth de bundel gedichten die in Engeland de start van de Romantische beweging werd, de *Lyrical Ballads*.



Dear Brother,
I have often been surprized, that Mathematics,
the quintessence of Truth, should have found
admirers so few and so languid.—Frequent
consideration and minute scrutiny have at
length unravelled the cause—viz.—that though
Reason is feasted, Imagination is starved; whilst
Reason is luxuriating in its proper Paradise,
Imagination is wearily travelling on a dreary
desart. To assist Reason by the stimulus of
Imagination is the design of the following
production.[6]

De 'following production' is een berijmde versie van het bewijs van propositie I van De Elementen van Euclides.
Het contrast *Wiskundige Rede / Verbeelding* is een grondtoon in bijna alle citaten in dit artikel. Het uit zich ook in de keuze der adjectieven en beelden: stenig en koud voor de Rede, warmte en kleurrijk voor de Verbeelding.

De trivialisering van de Romantiek

Niet iedereen die in de vroege 19e eeuw leefde deelde deze bezwaren. Uiteraard niet. Maar laten we ook niet denken dat het bezwaren en vooroordelen zijn van een voorbije periode. Romantici met een Schlegeliaans idealistische filosofie als die van Novalis zijn momenteel vrij zeldzaam, meer veel van de Romantische ideeën kunnen we nog dagelijks in getrivialiseerde vorm aanhoren.
Wie zegt: 'O, dus jij denkt dat je alles kunt berekenen', toont dezelfde ergernis als Keats, zij het wat schameler geformuleerd.
Standaard uitdrukkingen zijn het: *harde* objectieve feiten en *koel* redeneren. Daar zijn ze: Wordsworths steen en Keats' koele filosoof.
Iemand vroeg me, staande bij een overduidelijk wiskundig geïnspireerd kunstwerk: 'Raakt dit nu uw wiskundige ratio of uw artistieke emoties?' Ik werd vooral verzocht de twee werelden gescheiden te houden.
Het publieke beeld van wiskunde klopt genadeloos goed met de romantische bezwaren. Het wordt ook door de media in (hopelijk onbewuste) samenwerking met de beroepsgroep mede in stand gehouden.
Een voorbeeld uit Het Parool van 15 maart 2003, een kopje boven een verdrietige klacht:



Eens stond de Nederlandse wiskunde aan de
internationale top. Maar die tijd is voorbij.
Haakjes wegwerken, breuken onder één noemer
brengen: vwo-scholieren kunnen het niet meer,
klagen deskundigen.
En het aantal wiskundestudenten daalde van
vijfhonderd naar honderd.

Het beeld is weer bevestigd: wiskundigen reduceren alles tot formules en blijven tot hun pensioen haakjes wegwerken. Geen gezond mens met nog een laatste spoortje 'Verbeelding' wil zo'n 'Schreiber' wezen.

Het wil op het moment niet zo best lukken met de aantrekkelijkheid van het vak wiskunde en de zusjes natuurwetenschap en techniek. Dat is bekend en er zijn vele redenen voor aangevoerd.
Maar zou het misschien (ook een beetje) komen omdat er weinig echt geluisterd is naar de bezwaren van Wordsworth, Keats, Novalis en Goethe en vele anderen?

Nogmaals de regenboog

Wordsworth krijgt het laatste woord:



The Rainbow
My heart leaps up when I behold
A Rainbow in the sky:
So was it when my life began;
So be it when I shall grow old,
Or let me die!
The Child is father of the man;
And I wish my days to be
Bound each to each by natural piety.[7]

The Child is father of the man, dat is de regel die in het klaslokaal van William Wordsworth in Hawkshead op de muur is gezet. Misschien is het wel Wordsworths beroemdste regel.
Mag iemand duizend keer de regenboog zien, zonder die met prisma's, bolvomige druppels en gedifferentieerde arcsinussen te willen begrijpen? Ik vind van wel, zeker als het zonder nodeloos verzet tegen de rede gaat, zoals bij Wordsworth.
Anders gezegd: waardering exacterzijds voor de Romantische Beleving, zonder meegaan in de excessen ervan (er zijn er vele, helaas!) schept misschien meer ruimte voor anderzijdse erkenning van de waarden van de Verlichte Rede dan afgedwongen reisjes over '*strange seas of Thought, alone*'.

Noten

[1] William Wordsworth; Slotregels van Ode, Intimations of Immortality (1802-1804).
[2] Novalis: Paralipomena zum 'Heinrich von Ofterdingen'.
[3] Novalis, brief aan Friedrich Schlegel in Jena, 18 juni 1800.
[4] Beide geciteerd in The masks of Keats: the endeavour of a poet, Thomas MacFarland, Oxford University Press 2000.
[5] J. W. Goethe: Ueber die Naturwissenschaft, einzelne betrachtungen und Aphorismen. Gesamtausgabe Stuttgart, 1885, I.
[6] De tekst en de bijhorende brief staan op internet: http://etext.lib.virginia.edu/stc/Coleridge/ascii_files/geometry_poem_letter.html
[7] William Wordsworth (1802). Eerste publicatie in 'Moods of my own mind' (1807).

Bronnen

De poëtische werken van William Wordsworth staan geheel op internet:
- http://www.bartleby.com/145/
Maar twee Penguinpockets zijn handiger, en veruit de beste gids voor wandelen in het Lake District. Alle geciteerde teksten van Wordsworth staan in de volgende twee bronnen:
- William Wordsworth: Selected Poems. Penguin Classics (1994).
- William Wordsworth: The Prelude, The four texts (1798, 1799, 1805, 1850). Penguin Classics (1995).
Een recente, zeer goede biografie over William Wordsworth is:
- Juliet Baker: Wordsworth, A Life. Viking Press (2000).

Keats staat ook op internet en in de Penguinkast; er is een Nederlandse vertaling van diverse gedichten van Keats. Lamia staat daar gedeeltelijk in, maar het fragment met 'Unweaving the rainbow' net niet.
- www.bartleby.com/people/Keats-Jo.html
- John Keats: Selected Poems. Penguin Books (1988).
- John Keats: Gedichten. Ambo tweetalige editie, samengesteld door Léon Stapper. Ambo (1991).
Vertaalde teksten van William en Dorothy Wordsworth, Keats en anderen zijn ook te vinden in:
- I. Cialona (red.): De tweede ronde, Tijdschrift voor literatuur. Herfst 2003: Lake District-nummer.

Novalis' Heinrich von Ofterdingen staat ook op internet én op papier:
- http://gutenberg.spiegel.de/novalis/ofterdng/ofterdng.htm: Novalis, Heinrich von Ofterdingen.
- Novalis: Heinrich von Ofterdingen. Reclam, Stuttgart (1978, goedkope schooluitgave).

Er zijn diverse volledige Goethe-uitgaven. De Goethe-citaten van hierboven komen uit
- Goethe: Sammtliche Werke, Vollständige Ausgabe in Zehn Bänden. Stuttgart (1885).
De Farbenlehre beslaat daarvan een vol deel. Ze staat nog steeds in de belangstelling, vooral in antroposofische kringen. Er is een Nederlandse vertaling, maar die is niet volledig; het origineel omvat zo'n 600 bladzijden:
- J.W. Goethe: Kleurenleer. Samengesteld door Bob Siepman van den Berg; vertaling Pim Lukkenaer. Zeist, Vrij Geestesleven (1991).

Over de vroege Romantiek in het algemeen:
- H. G. Schenk: The Mind of the European Romantics. Oxford University Press (1966).
- Hugh Honnour: Romanticism. Harper and Row (1979.
- Marilyn Butler: Romantics, Rebels and Reactionaries. English Literature and its Background, 1760-1830. Oxford University Press (1981).

Over de tweedeling literatuur/wetenschap is de beruchte Rede Lecture van C.P. Snow uit 1959 nog steeds interessant. Hier een bron met een uitvoerige weergave van het debat dat de lezing indertijd opriep:
- C.P. Snow: The Two Cultures. Cambridge University Press (1998).

Over de auteur

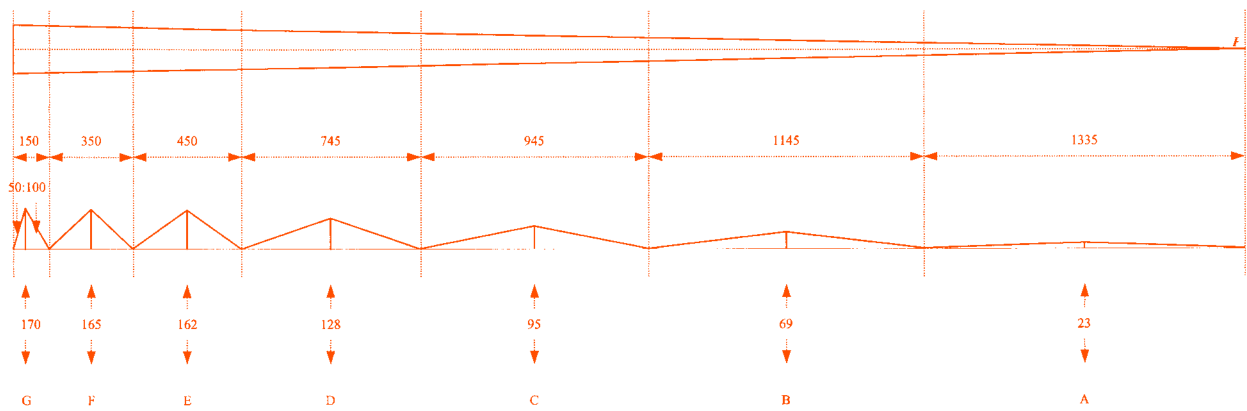
Aad Goddijn is werkzaam bij het Freudenthal Instituut en is bestuurslid van de stichting Ars et Mathesis (www.arsetmathesis.nl). Hij heeft meegewerkt aan de ontwikkeling van wiskunde B2 in de nieuwe profielen en is momenteel actief betrokken bij het Welp-project. Hij is vooral geïnteresseerd in het raakvlak kunst en wiskunde omdat kunstenaars wiskundigen beperktheden en mogelijkheden van de discipline laten zien, die ze zelf niet altijd lijken te kennen.
Voor meer informatie en eventueel extra literatuur bij dit artikel schrijf naar A.Goddijn@fi.uu.nl of zie zijn website (www.fi.uu.nl/~aad).


FIGUUR 1

METEN AAN EEN KUNSTWERK

Een inspirerende leerling-activiteit naar aanleiding van een kunstwerk van Henk van Bennekum

[Bart Heukelom]



Tweedimensionale structuurtekening van zowel het grondvlak als het zijaanzicht van een staalplastiek van *Henk van Bennekum* uit 1987, getiteld *'Horizontaal beeld'*.
Het beeld bestaat uit zeven piramides en ligt aan de Hugo de Vrieslaan op de hoek met de Pasteurstraat in Amsterdam.
De getallen geven de werkelijke lengtes en hoogtes in centimeters van de afzonderlijke piramides weer.
De schaal van de tekening is 1:200.

FIGUUR 2

Oriëntatie

Op de Hugo de Vrieslaan hoek Pasteurweg in de Amsterdamse Watergraafsmeer staat een kunstwerk dat opgebouwd is uit een aantal piramides (zie figuur 1). Nadat ik er toch vele malen langs was gereden, bleef dit kunstwerk mijn aandacht trekken. Op een bepaald moment realiseerde ik me dat dit komt door het feit dat bij alle piramides de top recht boven het snijpunt van de diagonalen van het grondvlak staat, behalve bij de piramide met de hoogste top: deze top heeft duidelijk een andere positie. Het lijkt wel alsof de kunstenaar eerst de grootste vanzelfsprekendheid wil opbouwen om die dan aan het einde plotseling te vermorzelen.
Het bleek zeer lastig te zijn, een goede en duidelijke foto van het gehele kunstwerk te nemen. De afmetingen van het gehele kunstwerk en de achtergrond tegen het gras zijn moeilijke omstandigheden en de laagste piramide lijkt in hoog gras gewoon te 'verdwijnen', terwijl ook moeilijk een indruk van de grondvlakken te geven is.
Ik besloot dus om het geheel op te meten om er een tekening van te maken.
Het resultaat van de metingen staat in figuur 2: het grondvlak en zij-aanzicht van het gehele kunstwerk. Als schaal is 1:200 genomen.

Observeren

Deze piramides zijn gemaakt van een soort plaatstaal. Ze variëren in hoogte: de hoogste is ruim anderhalve meter hoog (piramide *G* in de tekening) en de laagste ongeveer 30 centimeter (piramide *A*), waarbij de afmetingen van het grondvlak respectievelijk ongeveer 2 meter bij 1,50 meter en 13 meter bij 40 cm zijn.
De zeven piramides zijn in een rechte lijn achter elkaar geplaatst in volgorde van hoogte van de top tot het grondvlak (respectievelijk piramide *A* tot en met *G*), zodanig dat de grondvlakken van de piramides samen het grondvlak van de het gehele kunstwerk zijn. In de tekening is te zien dat het grondvlak van het gehele kunstwerk een gelijkbenige driehoek is, met *P* als top.
De reden waarom het kunstwerk mijn aandacht blijft trekken is, dat de top van de hoogste piramide niet recht boven het midden van het grondvlak staat. De top van piramide *G* staat wel boven de hoogtelijn (vanuit punt *P*) van het grondvlak van het gehele kunstwerk maar niet boven de verbindingslijn van de twee middens van de schuine zijden van het grondvlak van piramide *G*.

Leerling-opdrachten

Al doende met het meten en tekenen van het kunstwerk realiseerde ik me dat het opmeten ook een aardige oefening voor leerlingen zou zijn, want ik merkte het volgende:
- Het is allemaal wat lastig op te meten, want hoe meet je nu precies de hoogte van de piramides? Ik schatte de hoogte door met twee stokken te werken. Eén stok plaatste ik horizontaal vanaf de top tegen een stok die loodrecht op de grond stond.
Het grasveld en de grond sluiten niet precies aan op het grondvlak van de piramides. In enkele gevallen 'zweefde' het grondvlak van de piramide iets boven het grasveld doordat het regenwater wat grond had weggespoeld.
Als je deze metingen alleen uitvoert maak je meetfouten. Een groepje van drie leerlingen zou bij een onderlinge goede samenwerking een heel eind kunnen komen. Ze ontwikkelen dan de vaardigheden om goed met elkaar samen te werken en goed te leren meten met behulp van geïmproviseerde hulpstukken.
- Voor de leerlingen komen er op een heel concrete manier diverse wiskundige begrippen aan de orde, zoals: Welke schaal moet je nu nemen om het kunstwerk met de juiste verhoudingen op één A4 te tekenen? Wat is een piramide, gelijkbenige driehoek, trapezium, hoogtelijn, wat zijn verhoudingen?
- Naast de wiskundige intellectuele activiteiten is er vanwege de aard van het kunstwerk ook de vraag te

stellen: welke indruk maakt dit kunstwerk nu op je? Deze vraag wordt misschien vóór het opmeten anders beantwoord dan na afloop van het opmeten. Zo kunnen leerlingen emotionele indrukken koppelen aan wiskundige activiteiten.

Ik heb een lijstje met vragen gemaakt dat in eerste instantie bedoeld is voor de onderbouw, maar ik sluit niet uit dat dit kunstwerk ook een goede aanleiding zou kunnen vormen voor bijvoorbeeld een praktische opdracht in de bovenbouw. Voor leerlingen van de bovenbouw kan men namelijk een stapje verder gaan door onder andere de vraag te stellen in hoeverre de metingen nu nauwkeurig zijn geweest.
Kijkt men met een zekere afstand naar het kunstwerk dan krijgt men toch sterk de indruk dat de toppen van de piramides op een rechte lijn liggen. Dat is in de werkelijkheid weer wat makkelijker te zien dan op de tekening. Ervan uitgaande dat de toppen op een rechte lijn liggen kunnen we ons bijvoorbeeld de vraag stellen of mijn metingen nauwkeurig zijn geweest. Met de leerlingen kun je in die situatie het volgende overwegen:
Het grondvlak van het gehele kunstwerk is een gelijkbenige driehoek met top P. Vanuit P tekenen we de hoogtelijn op de basis van de gelijkbenige driehoek die het grondvlak van het gehele kunstwerk voorstelt. We projecteren de toppen van de piramides loodrecht op deze hoogtelijn. Gezien de verhouding tussen de lengte van de basis en de lengtes van de twee andere zijden van de gelijkbenige driehoek doe ik maar alsof de hoogtelijn vanuit P even lang is als de twee zijden van de gelijkbenige driehoek van het grondvlak. De twee zijden zijn opgemeten, waardoor ik de afstand van de projectie van elke top van de piramide op de hoogtelijn tot punt P kan vaststellen.
Na wat berekeningen kreeg ik een tabelletje, waarin v = afstand van projectie van de top van een piramide op de hoogtelijn tot punt P gedeeld door de hoogte van dezelfde top. (De opgemeten waarden staan in de tekening.)

tabel 1

bij piramide	v
A	26,7
B	27,6
C	25,1
D	25,3
E	23,7
F	25,7
G	26,6

Het is nu te zien dat ik in mijn eentje de metingen niet zo nauwkeurig kon uitvoeren, want ik had natuurlijk overal dezelfde waarde moeten krijgen.
Je kunt met de leerlingen nog een stapje verder gaan door de rechte lijn door de toppen van de piramides te nader te bestuderen en dan de meetresultaten nog eens te toetsen. Een volgende stap voor bovenbouwleerlingen is om informatie over de kunstenaar op te zoeken op internet en de eigen informatie te vergelijken met datgene wat de kunstenaar over het kunstwerk heeft gezegd. Dat kan de aanleiding zijn om meer kunstwerken te bestuderen en zo te proberen een 'verband te zien' tussen wiskunde en kunst.

Leerlingen, kunst en wiskunde

De onmogelijkheid een goede foto van het kunstwerk te nemen dwong me om dit wiskundige kunstwerk te gaan opmeten en tijdens het opmeten constateerde ik dat het een goede inspiratie voor leerlingen zou kunnen zijn.
Over de getallen in tabel 1 kun je met leerlingen van gedachten wisselen; onderwerpen als verhouding in een driehoek, schaal, nauwkeurig meten en schatten zouden dan zeker op een concrete manier aan de orde kunnen komen.
Nu de tekening is gemaakt, is het duidelijk dat de kunstenaar mathematische vormen als basis heeft genomen en dat hij de piramides op een rijtje heeft gezet zodanig dat het een geheel wordt. Er moet dus van tevoren wel een ontwerp zijn gemaakt.
Hier gaan wiskunde en kunst duidelijk samen. Voor mij komen er twee afwijkingen voor die de vanzelfsprekendheid doorbreken die in het geheel ligt: de positie van de top van de hoogste piramide en het grondvlak van de kleinste piramide. Het blijft echter gissen wat het doel van de kunstenaar is geweest, maar dat doet er ook eigenlijk niet zo toe.
Ik weet niet hoe andere toeschouwers met dit kunstwerk omgaan. Het lijkt mij leuk om met een groep leerlingen dit kunstwerk eens op te meten en wiskundig te analyseren. Maar ik ben ook erg benieuwd naar hun reacties op deze wiskundige objecten als kunstwerk in Amsterdam; je weet bij leerlingen maar nooit wat er uit rolt.

Naschrift

Als burger van Amsterdam fietste ik vaak langs dit kunstwerk, en het begon me te intrigeren. Ik ben het gaan bestuderen zonder dat ik de kunstenaar kende. Ik wist dus niets van bedoelingen. Het was een bewuste keuze om er zonder informatie-vooraf op een onbevangen manier naar te kijken.
Ik meen dat leerlingen ook eerst maar eens op een onbevangen manier met dit wiskundige kunstwerk moeten omgaan. Nadat zij zelf de nodige observaties hebben gedaan en hun eigen conclusies hebben getrokken, kunnen ze die naast de opgezochte informatie leggen.
In een later stadium begreep ik dat de kunstenaar Henk van Bennekum is.
Nadere informatie over zijn werk kunt u vinden op *www.vanbennekum.com/*

Over de auteur

Bart Heukelom (e-mailadres: b.heukelom@wxs.nl) is ongeveer tien jaar uitgever wiskunde geweest bij Wolters-Noordhoff en was daarna voor vijf jaar als directielid verbonden aan een landelijke stichting die de studie- en beroepskeuzevoorlichting in Nederland moet professionaliseren. Tegenwoordig is hij interim-uitgever en heeft in dat kader voor meerdere uitgeverijen, scholen en andere instanties opdrachten uitgevoerd. Tevens geeft hij enkele wiskundelessen in de bovenbouw van vwo en havo. Daarnaast is hij onder andere lid van het bestuur van de stichting Ars et Mathesis.

Vragenlijst voor leerlingen

- Observeer het kunstwerk dat hier door de gemeente Amsterdam is neergezet. Hoe komt dit kunstwerk op je over? Wat vind je er mooi aan? Wat vind je er gek aan? Hoe zullen de buurtbewoners dit kunstwerk vinden?
- Bepaal voor jezelf hoe groot voor jou een stap van een meter is; gebruik daarvoor een duimstok of een voorwerp van een meter lengte. Loop met je stapgrootte van een meter langs het kunstwerk en bepaal hoe lang en hoe breed dit kunstwerk ongeveer is. Vergelijk jouw aantal stappen met het aantal stappen van de medeleerlingen uit je groep. Er zijn vast verschillen. Hoe zou dat kunnen komen?
- Geef alle piramides een letter, bijvoorbeeld de laagste piramide *A* en dan de hoogste piramide *G*. Maak een tabel zodat je voor elke piramide vijf nog te meten waarden kunt noteren.
- Zoek een lat van ongeveer 2,50 meter. Teken op deze lat een stuk af van 2 meter en geef daarop een onderverdeling in 20 cm aan. (Je krijgt dus 10 stukjes van 20 cm.)
- Meet van elke piramide de lengte van het grondvlak en noteer die waarden in je tabel.
- Meet nu ook de andere evenwijdige zijden van het grondvlak van de twee uiterste en middelste piramiden op. Schets de drie grondvlakken op papier. Hoe heten deze grondvlakken?
- Teken de grondvlakken op papier in de juiste verhoudingen. Als schaal kun je 1 : 100 gebruiken.
- Meet nu ook de andere vier grondvlakken op en noteer de waarden in je tabel.
- Maak een tekening van het grondvlak van het gehele kunstwerk; gebruik schaal 1 : 200.
- Zoek een methode om met z'n drieën de hoogte van de top ten opzichte van het grondvlak van elke piramide te bepalen. Zeer waarschijnlijk moet je met z'n drieën samenwerken om de hoogten nauwkeurig te meten. Noteer de gemeten waarden in je tabel.
- Maak een zijaanzicht van het gehele kunstwerk. Zet de opgemeten waarden in je tekening.
- Staat bij elke van de zeven piramides de top van de piramide precies boven het middelpunt van het grondvlak? Laat door middel van een tekening zien wat er aan de hand is.
- Nadat je met dit kunstwerk aan het werk bent geweest, kun je een ander indruk hebben gekregen: het kan nu anders bij je overkomen dan toen je het voor de eerste keer zag. Bespreek in je groep wat de verschillen zijn en zet die op papier.
- Op internet kun je informatie vinden over de kunstenaar. Probeer te achterhalen wat hij met dit kunstwerk wilde uitdrukken. Maakt deze kunstenaar nog meer wiskundige kunstwerken?

ABSTRACTIE IN KUNST EN WISKUNDE

Een denkbeeldige wandeling door een museum van gedachten

[F. van der Blij]

Waarschuwing

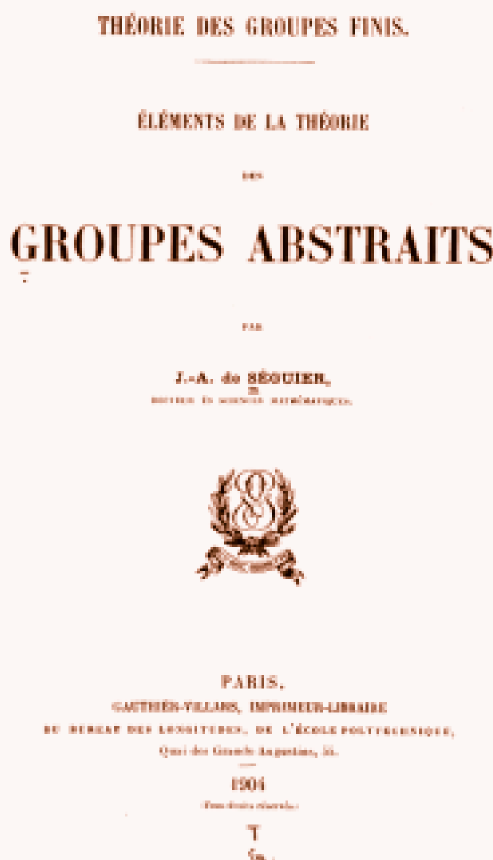
De onderstaande gedachten zijn niet als wetenschappelijke verhandeling bedoeld. Zittend achter het toetsenbord laat de auteur zijn gedachten de vrije loop, zo nu en dan onderbroken door een wandeling naar de boekenkast. Uitspraken, vlot neergeschreven, kunnen wellicht met wat meer onderzoek weerlegd worden. Vermoedens kunnen als hersenspinsels verworpen worden. Juist in dat geval heeft de auteur zijn doel bereikt, de lezer zelf over deze zaken te laten denken.

Aanleiding

De redactie van Euclides vroeg mij om een bijdrage over wiskunde en kunst. Nu heb ik wel eens lezingen met vele dia's over dit onderwerp gehouden, en dan bij een aantal vertoonde reproducties de betrokken wiskunde besproken. Maar in Euclides passen niet veel kleurreproducties, het moest dus anders.
Na enige hoofdbrekens groeide een gedachte: niet een hele collectie kunstwerken bespreken, niet het werk van slechts één kunstenaar bespreken, maar een *idee* aan de orde stellen.
Welk idee komt daarvoor in aanmerking? Bij wiskunde denk je al snel aan *'abstractie'*. En de kunst die mij bijzonder boeit is de kunst van de eerste helft van de 20ste eeuw, waarin de 'abstracte kunst' een belangrijke rol speelt.
Het moet dus een verhaal over abstractie in kunst en wiskunde worden.
Hoe het in te kleden? Een systematisch opgebouwd essay? Nee, ik kies een andere benadering. Zoals men bij een vluchtig bezoek aan een museum van zaal tot zaal loopt, en soms bij een werk wat langer blijft staan en andere zalen met een vluchtige blik afdoet, zo wil ik u bij mijn denkbeeldige wandeling door een museum van gedachten meenemen. Niet altijd is het verband tussen opvolgende zalen duidelijk, vaak is de bestudering van het object te oppervlakkig.

De wiskunde

Wanneer we in Euclides' *Elementen* lezen: 'Een lijn is breedteloze lengte, een vlak is, wat alleen lengte en breedte heeft', weten we dat de schrijver zaken als lichtstralen, gespannen koorden waargenomen heeft. Maar hij heeft geabstraheerd, de dikte van het koord is weggenomen.
Natuurlijk is al veel eerder de abstractie in de wiskunde ingevoerd. Het feit dat een verzameling appels, een verzameling mensen, een verzameling dagen met het zelfde woord geteld wordt is een vroege abstractie. We spreken vandaag aan de dag nog wel over een dozijn eieren, een gros spelden, maar nooit over een dozijn bomen of een gros bezoekers van een toneelvoorstelling.
Na het eerste tellen, de één, de ander, dat we nog herkennen in 'anderhalf', komt het inzicht dat de ander een tweede van het eerste is, al is de tweede natuurlijk nog altijd een ander als de eerste.
Maar is er een extra nieuwe aandacht voor abstractie in het begin van de twintigste eeuw?
In 1904 verscheen van de hand van J.-A. de Séguier in de serie 'Théorie des groupes finis' het leerboek *Théorie des groupes abstraits*. In de inleiding schrijft de auteur


THÉORIE DES GROUPES FINIS.

ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE

GROUPES ABSTRAITS

J.-A. de SÉGUIER,

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1904

FIGUUR 1

dat in verschillende gebieden van de algebra en de meetkunde *groepen* voorkomen en gebruikt worden. Dat maakt het noodzakelijk het idee van een abstracte groep te ontwikkelen, dus een groep te bestuderen onafhankelijk van de natuur van zijn elementen - dus net als we telwoorden gebruiken, onafhankelijk van de natuur van de getelde objecten.

De beeldende kunst

De afbeeldingen in de grotten, de prehistorische beeldjes; het zijn beelden van de levende dieren, van de aanwezige vrouwen. Maar het zijn abstracties; veel is weggelaten, je kunt de dieren van de rotstekeningen niet consumeren en het vrouwenbeeld mist een weelderige haardracht.
Natuurlijk zijn ornamenten een heel vroege vorm van geometrisch-abstracte kunst.
Later gaat men in de kunst proberen de werkelijkheid zo goed mogelijk na te bootsen, dat wil zeggen zulke beelden te maken dat de beschouwer zegt: ‘Het is net echt!’ Maar er komt weer een andere vorm van abstractie, bijvoorbeeld in middeleeuwse schilderijen waarop zowel de vlucht naar Egypte van het Christuskind is afgebeeld als de kruisiging van Jezus.
Een abstract beeld van Picasso bestaat uit een fietsstuur en een fietszadel, op zo’n manier samengevoegd dat we er direct de kop van een stier in herkennen.
In een studie over de Stijl lezen we dat Mondriaan zich achtereenvolgens verdiept had in verschillende kunstvormen en daaruit een persoonlijke stijl ontwikkelde die hij zelf omstreeks 1913, in navolging van de dichter-criticus Apollinaire, ‘abstract’ was gaan noemen.

Even muziek

We merken even op dat in de muziek het nabootsen altijd ondergeschikt lijkt: wanneer we de koekkoek menen te herkennen glimlachen we, maar spreken niet vol bewondering: ‘Net echt.’ Muziek lijkt een meer abstracte kunst dan de beeldende kunst.
Is het met het lied begonnen, zinnen die uitgesproken worden krijgen een melodie? Geeft het lopen een ritme? Instrumentale muziek zonder woorden is dan een stap naar abstractie. Kunnen de twaalftoons-composities gezien worden als een verdere stap in de richting van abstractie? Wist ik maar meer van muziek, nu moet ik maar raden!
Musici kunnen een partituur lezen; is de partituur weer een abstractie van het muziekstuk?
Zeker is dat in de partituur niet alles te vinden is wat in de uitvoering een rol speelt, dus is de partituur een abstractie van de uitvoering, maar de partituur is er vaak eerder dan de uitvoering.

De meetkunde

Na Euclides ontwikkelt de meetkunde zich verder, maar de abstracte meetkunde wil een abstractie van de waargenomen meetkunde in de ons omringende ruimte zijn. De discussie bij de constructie (of ontdekking) van de niet-euclidische meetkunde gaat deels ook over de vraag welke meetkunde nu de echte (abstractie) van onze wereld is. De som van de hoeken van driehoeken in de astronomische ruimte moet gemeten worden en zo uitsluitsel geven.

Begin van de 20ste eeuw; kunst

Wanneer je kunsthistorici vraagt wanneer de abstracte schilderkunst begonnen is zal men veelal zeggen: in het begin van de twintigste eeuw. Men zal misschien verwijzen naar Kandinski, wiens aandacht op een ochtend (rond 1910) op een bijzonder mooi schilderij in zijn atelier valt. Het is één van zijn eigen schilderijen, die echter volgens de ene traditie op zijn kop, volgens een andere op zijn kant staat. De schoonheid werd beleefd onafhankelijk van de afbeelding, het waren vorm en kleur die de aandacht vroegen.
Maar wanneer we de geschriften van en over Kandinski lezen, ontdekken we dat een hele zoektocht aan de geboorte van de abstractie vooraf ging. De titel van een van zijn leerboeken, uitgegeven als Bauhaus-boek, luidt: *Punkt und Linie zu Fläche*. We vinden daarin ook verwijzingen van de muziek naar de lijn, de vorm van de partituur, de structuur van de melodische lijn wordt naast de lijn in het schilderij gesteld.
Binnen de Nederlandse traditie zien we een andere weg van figuratief naar abstract. Ik noem slechts reeksen van schilderijen van Mondriaan, waarin een boom steeds een stapje verder geabstraheerd wordt totdat horizontaal en verticaal niet alleen gaan domineren, maar essentieel worden voor het beeld.
Ook de werken van Van Doesburg en vooral ook van Bart van der Leck tonen een geleidelijke overgang naar steeds verder gaande abstractie. In 1918 maakt Van der

Leck tenminste tien composities, die hij 'mathematische beelden' noemt. In dezelfde periode zien we op veel plaatsen in de wereld de abstracte kunst ontstaan en opbloeien.

Tweede helft van de 19de eeuw; wiskunde

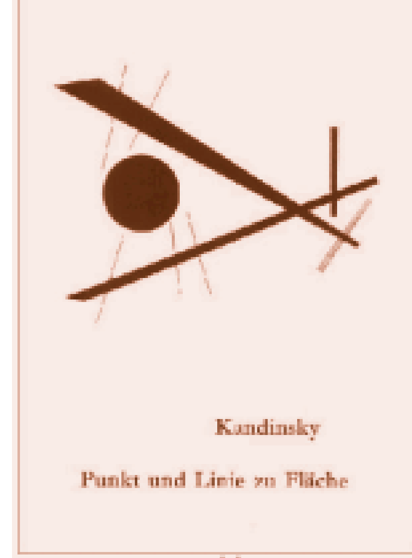
De meetkunde wordt abstracter, beter gezegd: verlaat de opdracht een mathematisch model van de waargenomen werkelijkheid te geven. Eerst voorzichtig, met projectieve meetkunde over de complexe getallen. Maar dan ook met projectieve en affiene meetkundes over willekeurige lichamen zoals eindige lichamen en p-adische lichamen.
(Even een tussenopmerking. Mijn spellingscontrole aanvaardt het meervoud "meetkundes" niet, volgens hem/haar is er dus maar één meetkunde. Zou "algebra's" aanvaard worden? Tot mijn verbazing wel. Dan eens proberen "meetkunden", dat mag weer niet.)
De meetkunde is op de muziek gaan lijken; er wordt niet meer gezocht naar het adagium: 'Het is net echt.' Met de algebra is het anders, het baanbrekende leerboek van Van der Waerden heet *Moderne Algebra* en niet *Abstracte Algebra*. En het meervoud 'algebra's' heeft een heel andere betekenis dan het meervoud 'meetkundes'. Is er maar één algebra? Of moeten we onderscheid maken in commutatieve en niet-commutatieve algebra enzovoorts? Hoewel dus de overgang naar grotere abstractie in de algebra niet zo duidelijk is als in de meetkunde, is zeker dat de wiskunde als totaliteit wel veel abstracter geworden is.

Multi-interpretabiliteit

Vergelijking van de optel-structuur met de vermenigvuldig-structuur van de rationale of van de reële getallen laat overeenkomsten zien: tegengestelde en inverse, het getal 0 en het getal 1. Het abstracte begrip *groep* vat deze zaken samen. En dit verschijnsel vinden we ook in andere onderwerpen uit de hedendaagse wiskunde terug. Een viertal getallen kan een punt in de projectieve ruimte voorstellen, maar evengoed een vlak.
In *Finnegan's Wake* van James Joyce staat in een zin: 'the wedding of neid and mourning'. De twee lettercombinaties 'neid' en 'mourning' krijgen in de context twee verschillende betekenissen. Bij Joyce is 'neid' het Duitse woord voor afgunst, en 'mourning' het Engelse woord voor rouw. Enerzijds nacht en ochtend, anderzijds afgunst en rouw.
Van een hedendaags schilder loopt het verhaal dat iemand staande voor een abstract schilderij van hem tegen hem zei: 'Dit is toch een dravend paard?', waarop de schilder het bevestigde. Maar een ogenblik later zei een andere beschouwer: 'Dit stelt toch een boom in de orkaan voor?', hetgeen de schilder opnieuw bevestigde - want hij was een beleefd man. Multi-interpretabiliteit vinden we vaak hand in hand gaan met abstractie.

Opgaven

In een recent boek van Rudi Fuchs (directeur van het Stedelijk Museum Amsterdam), *Tussen kunstenaars,*



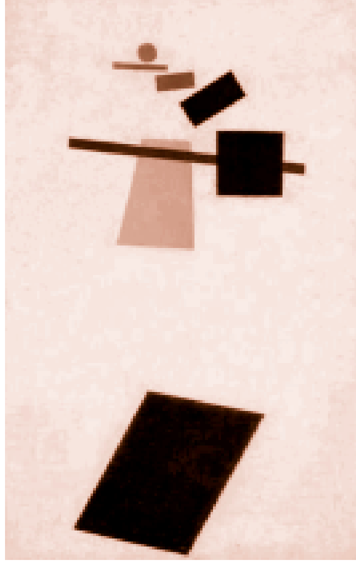
FIGUUR 2

een romance (De Bezige Bij, 2002), vond ik een aantal uitspraken over abstractie in de kunst. Ik citeer ze hieronder en vraag de lezer voor zich zelf na te gaan of de uitspraken zinvol blijven wanneer we 'kunst' e.d. vervangen door 'wiskunde'.

(pag. 158) Voor kunstenaars als Malewitsj en Mondriaan was het vinden van de geometrische abstractie een dramatisch moment van nieuwe ervaring geweest...
(pag. 163) Met het ontstaan van de abstracte kunst veranderde de manier waarop over kunst gedacht en geschreven werd.
(pag. 247) Voor [Ad] Dekkers is de noodzaak van zo'n grammatica evident: het is de enige manier om het kunst-maken niet vrijblijvend te laten zijn. Bovendien, omdat de grammaticale regels niet zijn ontleend aan 'de natuur', maar aan een aantal concrete gegevens binnen het medium (het vlak zijn van een schilderij, het hoeken hebben van een rechthoek) kan men ook spreken van een absolute abstractheid.
(pag. 414) Het was duidelijk dat de 'uitvinding' van de abstracte kunst, en met name de radicale geometrische versie ervan, de grote ontdekking van de twintigste eeuw is en dat zij het karakter en de praktijk van de moderne kunst onomkeerbaar heeft beinvloed.
(pag. 532) Het probleem met abstracte kunst is –met een korreltje zout– dat zij abstract is. Hoe moet de relatie inzake de compositie tussen twee rechthoeken, waarvan de een geel en de ander blauw, in een volstrekt abstract schilderij worden gelieerd aan een wereld vol leven, lijden, dromen, concepten, ..., verhalen en sprookjes, aan een wereld waarin niets vergeten wordt of mag vergeten worden?

Theorie

Onder het bijvoeglijk naamwoord *abstract* blijken verschillende betekenislagen te liggen.
Een eerste is: het maken van een model, een afbeelding van een element uit de waargenomen werkelijkheid, ontdaan van een aantal facetten. Simpel gezegd: 'men ziet af van'.



FIGUUR 3 K.S. Malevich, Suprematism. Painter-like Realism of a Football-Player, Color Masses of the Fourth Dimension. 1915.

Een tweede is: men bouwt iets op vanuit een bepaalde gedachte of structuur. Voorbeelden zijn muzikale composities, ornamenten (bij voorbeeld de islamitische ornamenten), geometrische beeldhouwwerken, abstracte groepen, meerdimensionale meetkundes, enzovoorts.
En de resultaten van deze abstractie blijken in een aantal gevallen dezelfde eigenschappen te hebben, onafhankelijk van de ontstaanswijze als 'weglaten' of door 'constructie'.

Vragen en vermoedens

We zagen in een periode van enkele tientallen jaren de abstracte schilderkunst en de abstracte wiskunde opkomen. Is het de tijdgeest of is het een toevallige coïncidentie? Wat weten wiskundigen van eigentijdse kunst, wat weten kunstenaars van eigentijdse wiskunde?
Over de kennis van wiskundigen van eigentijdse kunst weet ik niet veel te melden. Ik krijg de indruk dat de verdere abstractie in de wiskunde meer geleidelijk gekomen is vergeleken met de abstracte stromingen in de kunst. Ook was in de wiskunde de nieuwe abstractie eerder dan in de kunst aanwezig.
Over het tweede is wel wat meer te zeggen.
Van de hand van Linda Dalrymple Henderson verscheen het 450 pagina's tellend boek *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art* (Princeton University Press, 1983). Zij behandelt de rol van de abstracte meetkunde, in het bijzonder de vier-dimensionale meetkunde in onder andere de Amerikaanse schilderkunst aan het einde van de 19de eeuw. Populaire boeken, men denke bij voorbeeld aan *Flatland*, inspireerden de kunstenaars. In kringen van Europese kunstenaars speelden ook populaire geschriften van H. Poincaré over de theorie van de ruimte en meerdimensionale meetkunde een belangrijke rol. In het tijdschrift De Stijl is discussie te vinden over het verschil van de vierde dimensie als meetkundige dimensie (denk aan *Flatland*) en de vierde dimensie als de tijd in de relativiteitstheorie. De kunstenaar Severini maakt zijn medekunstbroeders dan attent op het feit dat daar een imaginaire grootheid mede optreedt; hebben zij de wiskunde en natuurkunde wel goed begrepen? Schetsen van Van Doesburg geven klassieke projecties van vier-dimensionale kubussen weer.
Ook de Russische kunst wordt door Linda Dalrymple Henderson uitvoerig behandeld. Zo lezen we dat in december 1915 bij een expositie van de schilder Malevich van 39 van zijn schilderijen er vijf voorkomen met titels die verwijzen naar de vierde dimensie.
De vraag doet zich echter voor of de vierde dimensie door de kunstenaars gezien wordt in het licht van de abstractie van een bovennatuurlijke werkelijkheid of als wiskundig spel op zoek naar structuren.

Het laatste woord

Samenvattend wilde ik spreken over een tweede abstractie in de wiskunde. De eerste zie ik bij Euclides, de tweede in de tweede helft van de 19de eeuw. En in de beeldende kunst zie ik omstreeks die zelfde tijd de term en de discussie over abstracte schilderkunst opkomen.
Is er een oorzakelijk gevolg, is het wat C.G. Jung *Synchroniteit* noemt of is het gewoon toeval?
Was het in de beeldende kunst een revolutie of een tijdelijke mode?
In de wiskunde maakte het een tweedeling duidelijk. Enerzijds gaat het om wiskunde om de wiskunde. Hugo Brandt Corstius verdedigde onlangs overheidssubsidies voor de wiskunde, analoog aan subsidies voor bijvoorbeeld musea en orkesten. Aan de andere kant is de wiskunde een wezenlijk hulpmiddel bij natuurkunde en vele andere disciplines.
Als bon mot is wel eens het volgende geponeerd: een natuurwetenschapper, een econoom, een socioloog kan net zoveel wiskunde gebruiken als zij of hij kent. Door de abstractie zijn bepaalde delen van de wiskunde soms voor vele problemen te gebruiken. Het abstracte karakter van een model maakt dit mogelijk. Dit is soms een argument in de discussie hoe veel wiskunde en welke wiskunde als hulpvak voor andere disciplines aan geboden wordt. Dit speelt een rol bij wiskunde-programma's voor de verschillende profielen in het voortgezet onderwijs en zeker ook bij bijvak-programma's in tertiaire opleidingen.
En nu zijn we bij het wiskundeonderwijs aan gekomen. Ziet het wiskundeonderwijs voor iedere leerling kans een evenwichtig programma aan te bieden dat beide facetten van de wiskunde omvat?
De discussie is in volle gang!

Over de auteur

F. van der Blij (e-mailadres: vanderblij@tiscali.nl) was vanaf 1946 enige jaren leraar wiskunde in het voortgezet onderwijs. Daarna was hij als hoogleraar verbonden aan de Rijksuniversiteit Utrecht in welke functie hij ook betrokken was bij verschillende voorlopers van het huidige Freudenthal Instituut.
Hij was lid van de gemeentelijke adviescommissie van het Centraal Museum in Utrecht en voorzitter van de stichting Ars et Mathesis, en schreef een enkel artikel over de relatie tussen kunst en wiskunde.

WISKUNDEGEDICHTJES VAN EERSTEKLASSERS

[Irene Dalm en leerlingen uit klas 1-vmbo]

Op de Nationale Wiskunde Dagen 2003 hoorde ik Marjolein Kool vertellen over haar gedichten. Ik dacht direct: ‘Dat is leuk, daar kan ik misschien in de klas iets mee doen.’ Na aankoop van haar boekje kreeg ik daar steeds meer zin in. Als bij mij zo’n idee boven komt, wil ik er graag meteen iets mee doen, met als doel de wiskundelessen leuk en afwisselend te houden. Ik heb toen een opdracht in elkaar gezet voor een wiskundeles in de eerste klas vmbo. Die opdracht heb ik de leerlingen gegeven na het voordragen van enkele gedichten uit het boekje van Marjolein Kool. (Ik had er wèl een paar gedichten uitgehaald die voor de eersteklassers te begrijpen zijn.)

De opdracht was om nu zelf een gedicht te maken met betrekking tot wiskunde. Dit zo breed mogelijk; het mocht zelfs gaan over het wiskundelokaal of de wiskundedocent. Het moment in het jaar, februari, was natuurlijk wel handig, want er waren in de klas toen al verschillende onderwerpen van de wiskunde behandeld. Er mocht ook in groepjes gewerkt worden en ik had gevraagd om ook aan de presentatie te denken.

Na drie weken kreeg ik de gedichtjes van de leerlingen. Sommige leerlingen wilden de gedichtjes zelf voordragen in de les, anderen vroegen mij dit te doen. Zo zijn de gedichten allemaal voorgedragen. De leerlingen vonden het leuk om te doen en maakten er ware plaatjes van, posters, met wiskundige tekens en modellen.

Nu hangen er diverse posters in mijn lokaal, en de gedichten worden daardoor ook door andere leerlingen gelezen. Die vinden dat vaak erg leuk.

Misschien leverde deze opdracht niet zozeer qua *wiskunde* direct wat op, maar wel aan *enthousiasme* om ‘iets’ met wiskunde te doen. En een indirect gevolg: als het plezier erin zit om dit te doen, is de sfeer ook goed om lastige wiskundeproblemen aan te pakken.



Figuren [Sarina Hagenstein]

’t Leven is voor mij niet fijn
om driehoekig te zijn.
Ik ben de beste van de klas,
maar ik wou dat ik een vierkant was.

Och, vierkant is ook niet goed,
ik vind dat ik nog groeien moet.
Wat langer en niet zo breed,
dat is een rechthoek zoals je weet.

Ik ben een rechthoek en heel braaf,
maar vind het toch niet gaaf.
Een ruit als een drop of als een spek
dat klinkt voor mij maar al te gek.

’t Lijkt wel allemaal heel fijn,
maar ik wil een vlieger zijn.
Lekker vliegeren en dan op reis,
maakt me helemaal van de wijs.

Ik val meestal met een zucht,
uit de grote wijde lucht.
Met al die hoeken, ’t is niet fijn.
Laat me nu maar een cirkel zijn.

Ik ben een cirkel,
ik ben de maan, de zon.
Ik ben zoals een ton.
Ik ben best tevree
en ben er reuzeblij mee.

De kegels
[Martine Schenk en Sanne van der Graaf]

De balk die tot de kubus zei:
ik ben hetzelfde als jij.
Toen kwamen zij in strijd
en raakte de kubus al zijn ribben kwijt.

Toen werd de kubus een bol
en pompte zich vol.
Toen knalde de bol
en werd een kegel.

De balk werd jaloers
en koos een andere koers.
Toen kwamen zij weer in strijd.
en raakte de balk elf ribben kwijt.

De kegel die tot de kegel zei:
Nu ben ik weer hetzelfde als jij.
En toen waren ze allebei blij.

Wiskunde [Josha Wagenmakers]

Er is een vak wat ik eigenlijk liever mis,
dat is het kunnen en de kennis over het ‘Wis’.
Hier een kubus, daar een kwadraat,
snap soms niet waar het over gaat.
Vermenigvuldigen, inhoudsmaten en ga zo maar door,
ik vind het allemaal erg ingewikkeld hoor!

Toch wil ik het begrijpen en er tegenaan,
je zou er wat aan kunnen hebben, later voor je baan.
Je moet weten hoe het zit; de formules kan je leren,
maar er zijn andere vakken die mij meer interesseren:
Biologie, gym, muziek en Nederlandse taal,
daar ben ik ook veel beter in allemaal.

Geef mij maar wereldnatuurfonds, korfbal, gitaar of
een mooi gedicht.
Dan doe ik meer mijn best en dan doe ik meer mijn
plicht.
Laat de leraar dit maar niet horen,
maar ik ben nu eenmaal niet met die
‘wiskundeknobbel’ geboren.

Wiskundegedicht [Iris van der Wal]

Ik zie zoals ik het zie,
een kubus, een cilinder en een bol.
Je komt het overal tegen
bij huizen en bij straten
bij bruggen en bij wegen.
Hoe je het wendt of keert,
je hebt het allemaal bij wiskunde geleerd.



Over de wiskundedocent van deze leerlingen

Irene Dalm (e-mailadres: idalm@ibiza-mail.com) is lerares wiskunde aan het Wellantcollege vmbo Stek te Dordrecht.

DE KROMME LIJNEN VAN ALBRECHT DÜRER

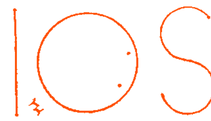
Behalve een begenadigd kunstenaar was de schilder Albrecht Dürer een gedreven leermeester. Dat blijkt in het bijzonder uit drie studieboeken die hij aan het eind van zijn leven liet verschijnen. Eén daarvan, 'Underweysung der Messung', bevat interessante meetkunde...

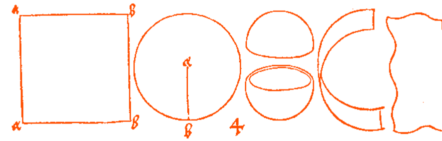
[Martin Kindt]

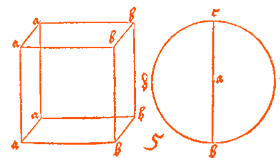




nderweysung der messung/mit dem zirckel vñ richtscheyt/in Linien ebnen vnnd gantzen corporen/
durch Albrecht Dürer zů samen getzogẽ/
vnd zů nutz allẽ kunstlieb habenden
mit zů gehörigen figuren/ in
truck gebracht/im jar.
M. D. X X v.





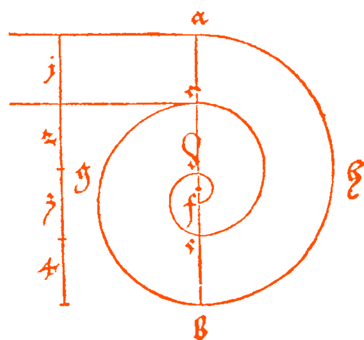


FIGUUR 1

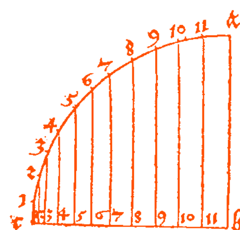
FIGUUR 2a, 2b, 2c

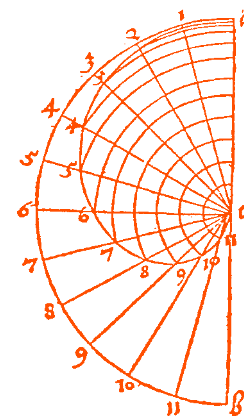
Dürer en Euclides

'Er bestaat een boek van Albrecht Dürer, weliswaar in het Duits geschreven, maar van een bewonderenswaardige eruditie.' Deze uitspraak, afkomstig van Erasmus, werd gedaan in het jaar 1528. Het boek waar hij op doelde - *Underweysung der Messung* ... - was een meetkundig handboek in de eerste plaats bestemd voor beeldende kunstenaars (figuur 1) toont de volledige titel). Dürer was een taalpurist en zocht naar specifiek Duitse termen, vandaar het woord 'Messung' (er had misschien beter 'Messkunst' kunnen staan) in plaats van 'Geometrie'.
Dürers boek is een beetje te vergelijken met een kunstexpositie verspreid over vier zalen van een museum, elk met een eigen thema, waarbij de samensteller niet alleen heeft verzameld en geordend, maar op sommige plaatsen ook origineel werk heeft geleverd. De compilator stierf in het jaar waarin Erasmus zijn lovende woorden schreef op 57-jarige leeftijd. Hij was de zoon van een Hongaarse goudsmid die zich in Neurenberg gevestigd had, de stad waar de befaamde wiskundige Regiomontanus in 1476 overleed. In deze stad van wetenschap en cultuur ontplooide de veelbelovende jongeling niet alleen zijn talent als etser en schilder, maar verzamelde hij ook kennis over wiskunde, in het bijzonder over de meetkunde. Zeer stimulerend voor zijn ontwikkeling waren zijn reizen naar Italië, waar hij werd ingewijd in de geheimen van het perspectief. Volgens sommige historici zou hij in Bologna de wiskundige Luca Pacioli hebben ontmoet, zeker is dat niet. Wel moet hij toegang hebben gehad tot diens werk *Somma di Arimetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita.*
Op een van zijn Italiaanse reizen (1507) wist hij voor het bedrag van één dukaat een exemplaar van de Elementen van Euclides te bemachtigen. Het betrof de Latijnse vertaling van Zamberti. Behalve dit werk en natuurlijk dat van Pacioli, heeft een boekje van een anoniem schrijver met als titel *Geometria deutsch* gediend als belangrijke bron voor Dürers meetkundige werk.
De grote bewondering die Dürer voor Euclides' oeuvre koesterde blijkt uit de aanhef op de eerste bladzijde van het boek, die vrij vertaald luidt:
De allerscherpzinnigste Euclides heeft de fundamenten van de meetkunde bijeengebracht. Zij die hem goed begrijpen, kunnen wat hier volgt laten voor wat het is, want dit is geschreven voor jongeren en voor hen die geen goed onderwijs hebben genoten.
Het lijkt er dan even op of Dürer als een ware adept de Elementen wil vertolken in het Duits, zij het dat hij een meer bloemrijke taal hanteert dan Euclides. Zo zegt hij over het begrip 'punt' onder meer: een punt is iets dat geen grootte, lengte, breedte of dikte heeft, en toch het begin is en het eind van alle lichamelijke objecten die men kan maken of die men zich kan indenken.
Vervolgens definieert hij de dimensies 1, 2 en 3 in Euclidische stijl:
a. een lijn is dat wat wel lengte, maar geen breedte of dikte heeft;
b. een oppervlak is dat wat lengte en breedte, maar geen dikte heeft;
c. een lichaam is dat wat zowel lengte, breedte als dikte heeft.
De bijbehorende illustraties 2a, 2b en 2c laten eigenlijk al zien dat hij een geheel andere koers inslaat dan Euclides.
Op figuur 2a kom ik nog terug. Figuur 2b laat een vierkant, cirkel, bolvlak, cilindervlak en een gebobbeld vlak zien. Opmerkelijk zijn Dürers dynamische beschrijvingen van kubus en bol (figuur 2c). De kubus ontstaat door het vierkant *abba* omhoog te schuiven



FIGUUR 3a, 3b





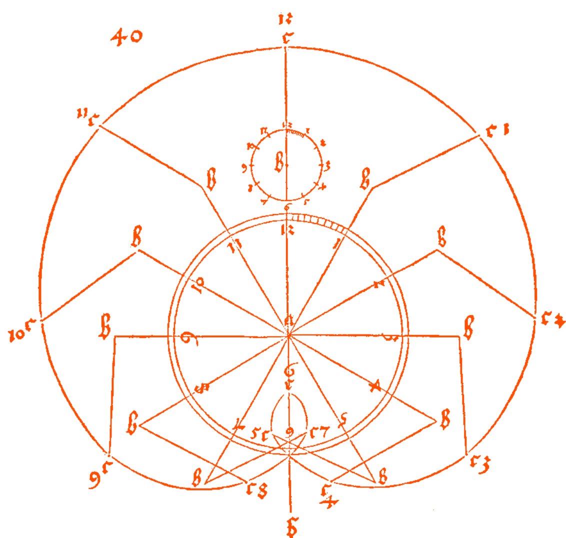
FIGUUR 3c, 3d

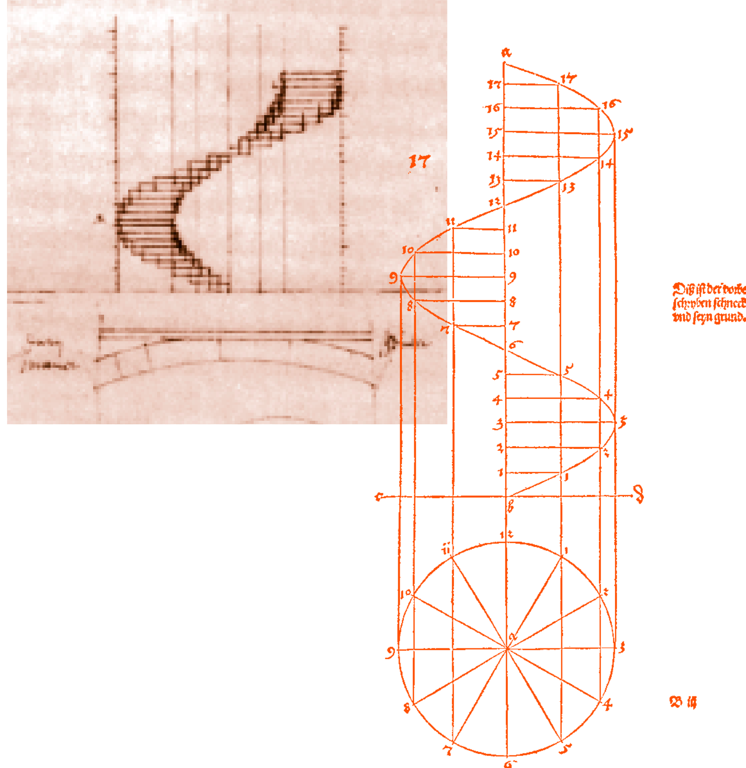
over een afstand gelijk aan de breedte van het vierkant; de bol wordt voortgebracht door een cirkel die om een middellijn draait.
Boek 1 richt zich dan verder op één-dimensionale zaken, kromme lijnen zeg maar. De afstand tussen Dürer en Euclides neemt daarbij per bladzijde toe. Veel van de figuren die in Dürers belangstelling staan komen bij Euclides niet voor en de stijl van behandelen is geheel anders. Er wordt geconstrueerd met een veel vrijer gebruik van passer en liniaal dan in de Elementen is toegestaan. De constructies worden als recepten beschreven, bewijzen van de juistheid ervan ontbreken.
Boek 2 handelt over vlakke figuren, voornamelijk regelmatige veelhoeken en tegelpatronen.
Boek 3 is meer op architectuur dan op meetkunde gericht (hier lijkt Vitruvius de inspirator) en bevat ontwerptekeningen van zuilen en monumenten.
Boek 4 ten slotte bevat onderwerpen uit de ruimtemeetkunde, onder andere de uitslagen van de vijf regelmatige en van een aantal halfregelmatige veelvlakken. Het eindigt met uitvoerige beschouwingen over het tekenen in perspectief en het construeren van schaduwen.
De opmaak van de bladzijden, met fraaie houtgesneden tekeningen en in Gothisch schrift, is van de meester zelf.

Spiralen en wat dies meer zij

Dürer onderscheidt (zie figuur 2a) drie typen van ééndimensionale figuren:
- de rechte lijn,
- de cirkel,
- de slangenlijn.

Voor de eerste twee typen bestaan tekeninstrumenten (liniaal en passer), maar over de totstandkoming van een figuur van het derde type (in eerste instantie voorgesteld door een S) zegt Dürer:
[...] *die met de hand kan worden getrokken, of punt voor punt, waarbij de vorm kan variëren. Voor deze lijn weet ik geen beter woord dan slangenlijn omdat zij getrokken kan worden in de richting die men wil.*
De eerste voorbeelden van kromme lijnen zijn dan vlakke spiralen, zoals die gebruikt worden bij de versiering van zuilen. De allereenvoudigste spiraal is samengesteld uit halve cirkels, waarbij het middelpunt heen en weer schuift; zie figuur 3a. Hoewel deze cirkelspiraal er glad uitziet, wringt er toch iets: de kromtestraal verandert discontinu bij elke overgang op een nieuwe halve cirkel. Of Dürer zich daarvan bewust was, is zeer de vraag. Wél haast hij zich om andere spiralen te exposeren, die niet lijden aan dit euvel.
De meest bekende is de spiraal van Archimedes. Om die te tekenen, verdeelt Dürer de cirkel in twaalf gelijke bogen en laat hij een 24-delig lijnstuk draaien om het middelpunt van de cirkel (figuur 3b). Het is aannemelijk dat Dürer de kinematische definitie van Archimedes kende, waarin sprake is van de baan van een punt dat zich eenparig beweegt langs een halve rechte (straal), terwijl diezelfde straal simultaan met een constante hoeksnelheid om zijn beginpunt draait. Hoewel de tekening bijna voor zichzelf spreekt, beschrijft Dürer omstandig hoe de puntsgewijze constructie dient te worden uitgevoerd.
Zo gaat hij in op de correspondentie tussen 13 en 1, 14 en 2, enzovoorts, en merkt als een echte schoolmeester op: als men zich houdt aan de nummering kan men zich niet vergissen. Ik merk hier op dat spiralen naar mijn smaak ten onrechte verwaarloosd worden in het meetkundeonderwijs. Het is een aardige oefening voor jonge leerlingen om een cirkelspiraal of een Archimedische spiraal op de wijze van Dürer te





FIGUUR 4

FIGUUR 5a, 5b

tekenen. Als ze wat ouder zijn en over een grafische rekenmachine beschikken, is het een uitdagende opgave om de Archimedische spiraal op het scherm te toveren. Dat lukt bijvoorbeeld via de formules $X = T\cos(T)$ en $Y = T\sin(T)$

Een andere uitdaging is het om die spiraal als meetkundige plaats met Cabri te maken (dit lukt omdat de lengte van een lijnstuk op een cirkel kan worden afgepast).

Door de draaiende liniaal een niet-lineaire schaalverdeling te geven, construeert Dürer andere spiraalvormen. In Archimedische stijl gezegd, komt het erop neer dat de hoeksnelheid van de draaiende lijn constant blijft, maar dat de snelheid van het bewegende punt (wetmatig) variabel is. Een analytisch model van zo'n beweging is:

$$\begin{cases} x = r(t)\cdot\sin t \\ y = r(t)\cdot\cos t \end{cases}$$

Dürer dacht aanschouwelijk meetkundig en verkreeg alternatieve schaalverdelingen via projectie (centraal of parallel) van een regelmatige schaalverdeling op een cirkel (gradenboog) op een rechte lijn, zoals bijvoorbeeld op een geo-driehoek.

Een mooi voorbeeld daarvan geeft figuur 3c. De daar getekende kromme blijkt te passen bij $r(t) = \sin\frac{1}{2}t$. Wij kunnen nu zeggen dat Dürer zich in zijn figuur beperkt heeft tot het interval $0 \le t \le \pi$. Een fraaier resultaat ontstaat als we t van 0 tot 4π had laten lopen (zie figuur 3d). Die laatste kromme wordt nu wel eens het *folium van Dürer* genoemd.

Een meer bekende kromme (figuur 4), waarvan Dürer als de eerste ontwerper moet worden beschouwd, is de kromme die thans bekend staat onder de naam *limaçon van Pascal* (genoemd naar de vader van).

Dürer noemt het 'spinlijn' omdat de gebroken lijnstukken in de figuur doen denken aan de poten van een spin. Ook hier is de figuur helder. Het punt *b* maakt kennelijk een cirkelbeweging om het punt *a* en het punt *c* cirkelt om *b* met dezelfde hoeksnelheid, waardoor in elke stand de draaihoek van *bc* ten opzichte van de verticale as het dubbele is van de draaihoek die *ab* met die as maakt.

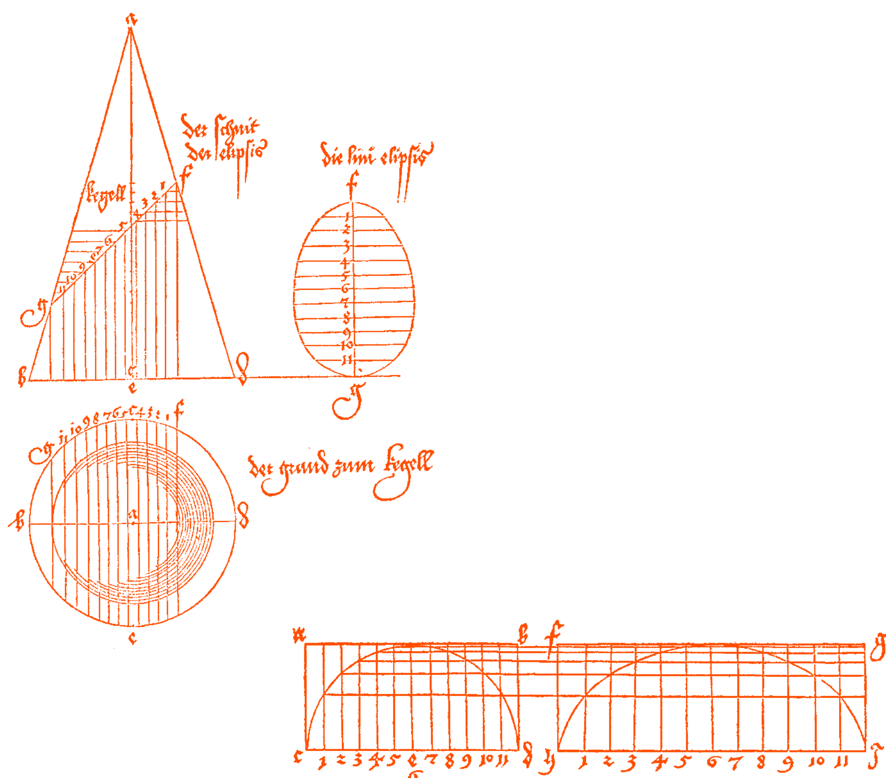
In Dürers tekening lijkt het erop of de lengten van *ab* en *bc* zich verhouden als 3 en 2 zodat een passende analytische voorstelling zou kunnen zijn:

$$\begin{cases} x = 3\sin t + 2\sin 2t \\ y = 3\cos t + 2\cos 2t \end{cases}$$

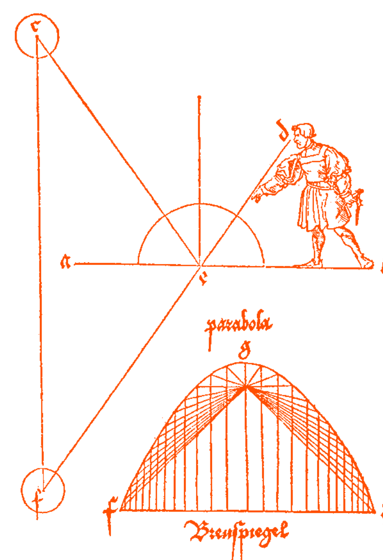
Deze figuur van Dürer zou, bij voorkeur zonder noemenswaardige toelichting, startpunt kunnen zijn van een onderzoeksopdracht in het studiehuis. De vraag zou dan bijvoorbeeld zijn om de kromme getrouw na te maken met grafische rekenmachine of Cabri en vervolgens te onderzoeken hoe de vorm van de kromme verandert bij een gewijzigde verhouding van de lengten van *ab* en *bc*.

De eerste sinusoïde

Dürer beperkt zich niet tot vlakke krommen. Een elementaire ruimtekromme is de helix, onder andere bekend van het Crick-Watsonmodel voor DNA. Dürer gebruikt de term schroeflijn en heeft daarbij aan de constructie van een wenteltrap gedacht (figuur 5a). Zijn manier van voorstellen (figuur 5b) dwingt in al zijn eenvoud bewondering af. Dürer blijkt, zoals ook bekend uit ander werk, zeer bedreven in het combineren van projectiefiguren, een vaardigheid die hij vermoedelijk leerde van de Italiaanse meesters in het perspectief en die pas zo'n 275 jaar later door toedoen van Gaspard Monge uitmondde in de 'beschrijvende meetkunde'. De procedure is hier simpel. De stralen van de cirkel (traptreden) worden stuk voor stuk op de juiste hoogte gebracht en geprojecteerd op



FIGUUR 6, 7



FIGUUR 8

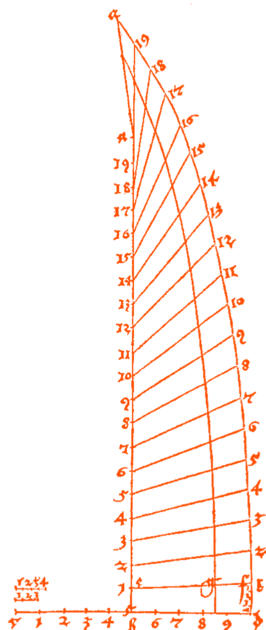
een verticaal vlak. Daarbij maakt Dürer als steeds gebruik van een handige nummering. Zo ontstaat een echte sinusoïde, die volgens vele historici in eerdere literatuur nimmer was aangetroffen.
Is het geen aardige gedachte om de introductie van de sinuslijn op school via de wenteltrap te laten verlopen? Als in plaats van linksom- een rechtsomdraaiende trap genomen wordt, hoeft alleen de bladzij nog negentig graden gedraaid te worden om de tekening te zien zoals die meestal in de schoolboekjes figureert. Het verband met de sinus van de hoek (de verkortingsverhouding bij projectie van een traptrede) is gemakkelijk gelegd.

Kegelsneden

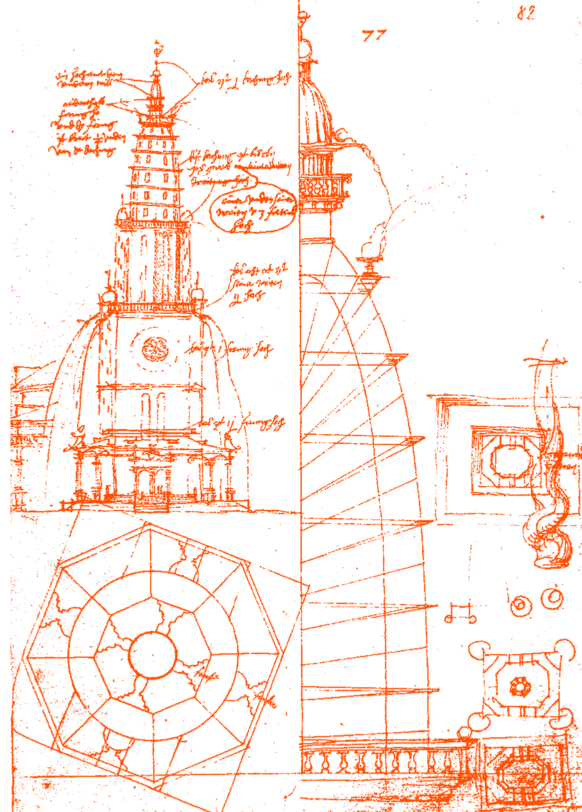
Andere fraaie voorbeelden van Dürers beschrijvende meetkunde avant la lettre geven zijn tekeningen van de drie typen kegelsneden.
Hij schrijft over deze krommen dat de 'Ouden' (bedoeld zijn de Griekse wiskundigen) ons hebben getoond dat er drie vormen van doorsneden zijn in een kegel (als men de vlakken door de top buiten beschouwing laat). Natuurlijk bedenkt hij Duitse namen voor elk van deze drie krommen: ellips wordt *Eierlinie*, parabool wordt *Brennlinie* en hyperbool wordt *Gabellinie*. Wat de ellips betreft, Dürers wens om zijn naamgeving van toepassing te laten zijn was blijkbaar zo sterk dat hij door onnauwkeurige uitvoering van een in principe correcte constructie werkelijk een soort ei krijgt (figuur 6). Zou Dürer gedacht hebben dat het spits toelopen van de kegel verantwoordelijk is voor de eivorm? Toegegeven, het is intuïtief allerminst duidelijk dat de kegelsnede hier twee symmetrie-assen moet hebben. Apollonius wist dat al wel, maar daar kwam een soort pre-algebraïsche redenering aan te pas. We hebben tot 1822 (Dandelin) moeten wachten voordat er een zuiver stereometrisch bewijs voor de tweevoudige symmetrie voorhanden was. Toch blijft de vergissing vreemd, want op een andere plaats in het boek tekent Dürer een perfecte ellips, maar dan als opgerekte cirkel (figuur 7). Met zijn schildersoog zal hij toch opgemerkt hebben dat een cirkel in perspectief, dus de doorsnede van een scheve kegel met een vlak, als twee druppels water op zo'n opgerekte cirkel lijkt en geen eivorm heeft. Het blijft een raadsel.
Dürer past de constructie via boven- en vooraanzicht ook toe om de parabool en (één tak van) de hyperbool te laten ontstaan. Bij de parabool vermeldt hij de bekende terugkaatsings-eigenschap. Figuur 8 verklaart waarom bij spiegeling in een vlak de hoeken van in- en uitval gelijk zijn. Met behulp van de raaklijn-eigenschap van de parabool kan dan worden aangetoond dat invallende stralen die parallel zijn met de symmetrie-as na terugkaatsing convergeren in het brandpunt. Daarover zegt Dürer slechts: [...] *en wat de oorzaak daarvan is, dat hebben de wiskundigen aangetoond en wie dit wil, kan het nalezen.*

Nuttig voor architecten

Als laatste Dürerse kromme in dit artikel eentje waarvan hij zegt dat die nuttig is voor architecten.
De (recursieve) constructie is niet direct uit figuur 9 af te lezen. Er is uitgegaan van twee onderling loodrechte lijnstukken *cd* en *ab*, respectievelijk van 10 en 20 eenheden. Vanuit de deelpunten 1 tot en met 19 op de verticale lijn zijn, ten opzichte van elkaar een klein beetje gedraaid, lijnstukken van 5 eenheden getekend. Dürer begint met deelpunt 1 en laat het eerste lijnstuk op de afstand $\frac{4}{3}$ van punt *d* eindigen (hij zegt dat dit punt op de cirkel met middelpunt *d* en straal $\frac{4}{3}$ moet liggen). Dit eindpunt wordt punt 1 van de kromme. Het lijnstuk vanuit punt 2 van *ab* eindigt dan op afstand $\frac{4}{3}$



FIGUUR 9



FIGUUR 10

van punt 1 van de kromme; dit eindpunt is punt 2 van de kromme. Enzovoort.
In een plaatje (figuur 10) uit zijn *Dresdense Schetsboek* blijkt wat hij als toepassing voor ogen had: de vorm van koepel op een toren.
Analytisch gezien is deze kromme een stuk minder gemakkelijk te beschrijven dan de eerder behandelde voorbeelden. De typisch discrete aanpak die Dürer steeds hanteert zou hier vertaald kunnen worden naar een continu proces. Laat het punt T de verticale lijn ba doorlopen en stel de hoogte op zeker moment gelijk aan t. Laat TS het bewegende lijnstuk met lengte 5 zijn. Een kleine verandering Δt van de hoogte van T correspondeert met een beweging van S over de kromme en wel over een boogje Δs gelijk aan $\frac{4}{3}\cdot\Delta t$.
Voor de booglengte s van de kromme, gemeten vanuit het startpunt d, geldt dan: $s=\frac{4}{3}t$.
Geven we T en S respectievelijk de coördinaten $(0, t)$ en (x, y) dan geldt enerzijds: $x^2+(y-t)^2=25$

en anderzijds: $\int_0^t\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\mathrm{d}\tau=\frac{4}{3}t$

en wie daar een parametervoorstelling of x,y-vergelijking uit distilleert mag zijn vinger opsteken.

Meetkunst

Het is hier al een paar keer opgemerkt: de meetkunde van Dürer ademt een totaal andere sfeer dan de klassieke meetkunde. Dat geldt zowel voor de keuze van de onderwerpen als voor de behandelingswijze. Men zou kunnen zeggen dat Dürer geen wiskundige pur sang was. Aan verificatie door rekenen, redeneren of bewijzen deed hij niet. Dat blijkt vooral in het deel over regelmatige veelhoeken, waarin eenvoudige hoekbeschouwingen c.q. berekeningen hem onmiddellijk voor een aantal opzichtige fouten zouden hebben behoed.

Dürers meetkunde is duidelijk een 'artistieke meetkunde', gericht op het vervaardigen van mooie geometrische vormen en niet op het uitpluizen van intrigerende eigenschappen; ambachtelijk, maar niet wetenschappelijk.
Ondanks (of misschien wel juist dankzij) deze kenmerken, durf ik te beweren dat de *Underweysung der Messung* een vruchtbare bron zou kunnen zijn bij het ontwerpen van een interessante meetkundecursus. De rijkdom aan onderwerpen (in dit artikel is slechts een klein deel getoond) is zo groot dat er geen vrees voor eenzijdigheid hoeft te bestaan. Ongetwijfeld zal het esthetisch element veel leerlingen aanspreken. De constructies met passer en liniaal op papier kunnen uitstekend worden aangevuld met het gebruik van Cabri. En als die leerlingen naar aanleiding van Dürers voorbeelden en figuren zouden worden uitgedaagd tot exploreren en redeneren, dan zou die cursus in mijn ogen zelfs ideaal kunnen worden. Daar droom ik wel eens van.

Over de auteur

Martin Kindt (e-mailadres: M.Kindt@fi.uu.nl) werd na 15 jaar leraarschap medewerker van het IOWO (de voorloper van het Freudenthal Instituut). Als leerplanontwikkelaar was hij nauw betrokken bij de experimenten ter invoering van wiskunde A en B op vwo en havo in de jaren '80 en bij het meer recente Profi-project. Daarnaast doceerde hij projectieve meetkunde voor de eerstegraads lerarenopleiding van de Hogeschool van Utrecht.

ARS (DIS)SYMMETRICA

Verslag van een congres

[Albert van der Schoot]

Inleiding

Wat voor deelnemers kun je verwachten op een wetenschappelijk symposium over symmetrie, waarbij ook nog een serie tentoonstellingen georganiseerd wordt? Dat het *Symmetry Festival 2003* (Boedapest, 16 tot 22 augustus) een interdisciplinair geheel zou worden sprak wel voor zich, en dat interdisciplinariteit meer betekent dan de optelsom van verschillende disciplines eveneens. Het waren vooral degenen die zich al hadden aangewend in de tussenruimten tussen de disciplines te zoeken, die hier aan het woord kwamen – of dat nu mathematici waren, atoomonderzoekers, biochemici, ruimtevaartdeskundigen, filosofen of kunstenaars. In verschillende gradaties van speelsheid en gedegen onderzoek werd hier een symmetrische woonplaats ontworpen (*SymmetriCity*), een digitale modelijn gelanceerd (*Softwear*) en werden ruitendertig-vlakken ruimtevullend gemaakt door er op de juiste plaatsen een deuk in te slaan, terwijl ze elders weer van pas kwamen als ideale basis voor een ruimte-station.

Geen betere plaats om dat te doen dan in de stad van Von Neumann, Wigner en Rubik – al werd die laatste naam alleen nog in de wandelgangen genoemd.

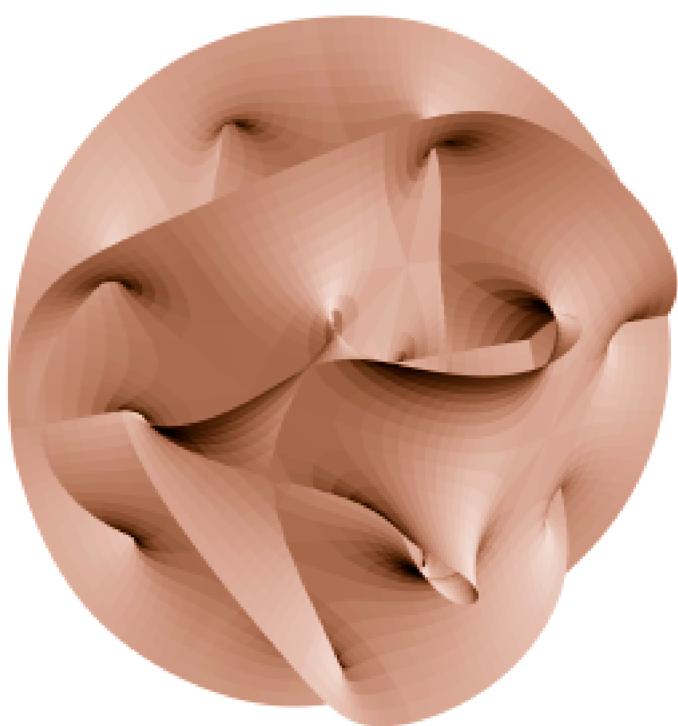
In het spoor van Escher

Twee beoogde sprekers konden niet meer verschijnen, omdat hun aards bestaan in de maanden voor het symposium tot een einde was gekomen: Ilya Prigogine (1917-2003) en Donald Coxeter (1907-2003). Vooral van Prigogine speet me dat zeer, omdat ik hem graag eens had horen spreken over de asymmetrie van de tijd in natuurwetenschappelijk opzicht en de relevantie daarvan voor de geesteswetenschappen. Coxeter was in de geest zeer nadrukkelijk aanwezig. Aan hem werd een herdenkingsbijeenkomst gewijd, waarop ook zijn biografe Siobhan Roberts aan het woord kwam. Ik was verbijsterd door haar mededeling dat Coxeters hersens momenteel op de Universiteit van Hamilton onderzocht worden, op voorstel van zijn dochter nog wel. Volgens de eerste berichten zou zijn *parietal lobe* groter zijn dan het gemiddelde, en bovendien – de congresgangers wierpen elkaar veelbetekenende blikken toe – een grotere mate van symmetrie vertonen. En passant vertelde ze dat Coxeter al vóór z'n vijftiende enkele composities, waaronder zelfs opera's, zou hebben voltooid; we hebben afgesproken dat ze me die binnenkort toestuurt, want ik ben wel benieuwd hoe hoog we die mededeling nu precies in moeten schatten.

Via Coxeter kwamen verschillende sprekers op Escher terecht, en op de contacten tussen beiden, die tot de creatie van Eschers *Cirkellimieten* leidden; hun interactie fungeerde op deze bijeenkomst als 'rolmodel' voor de vruchtbare samenwerking tussen kunst en wetenschap. De vaderlandse trots werd wel gestreeld door de rol die de Nederlandse graficus dertig jaar na zijn dood nog steeds op zo'n symposium speelt. Hier

FIGUUR 1





FIGUUR 2

moet in de eerste plaats de Escher-specialist Doris Schattschneider worden genoemd, die een boeiend betoog hield over de relaties tussen globale en locale symmetrie: als elke tegel in een tegelpatroon op dezelfde manier door andere tegels omringd is, is daarmee dan ook de symmetrie van dat patroon als geheel gegeven? Schattschneider liet zien dat het voorkomen van de ene vorm van symmetrie op zich weinig zegt over de andere vorm. De kunst is natuurlijk erachter te komen onder welke voorwaarden die andere vorm dan wel door de ene geïmpliceerd wordt, en dat bleek nog een goeddeels braakliggend onderzoeksterrein te zijn.[1] In dezelfde geest vergeleek Ivar Olovsson de symmetrie die in moleculen kan bestaan, maar die niet meer aan te wijzen is in de kristallen die door die moleculen gevormd worden. Ook hij illustreerde zijn lezing, over a-periodieke vlakvullingen en quasikristallen, rijkelijk met werk van Escher.

De verhouding tussen globale en locale eigenschappen keerde ook terug bij andere presentaties waarin de kunst tegelijkertijd een zelfstandige esthetische functie vervulde alsook een dienende functie om wetenschappelijk onderzoek inzichtelijk te maken. Cheryl Akner-Koler, beeldhouwster en docente industrieel ontwerpen uit Stockholm, vertelde over haar samenwerking met de fysicus Lars Bergström, die onderzoek doet naar de snaartheorie. Om de onvoorstelbare wereld van tien dimensies toch perceptueel te presenteren gebruikte zij als opstapje de paradox van de Möbiusband. (Is de buitenkant een andere kant dan de binnenkant? Locaal wel, globaal niet.) Van haar hand waren er prachtige transparanten (op doek) te zien, zoals de hierbij afgebeelde, die zij aanduidt als *Virtual point cloud of organic Möbius strip* (figuur 1). Ook toonde ze haar artistieke verwerkingen van Calabi-Yau-veelvlakken, die net als de transparanten eerder op de tentoonstelling *Oneindigheid* in Stockholm waren geëxposeerd.[2] Als voortzetting van de slag in de Möbiusband zien we in figuur 2 de verstrengeling van de hypervlakken uit het theoretische model van Calabi en Yau gevisualiseerd. Natuurlijk, het is een driedimensionaal ‘ding’, en de afbeelding ervan is tweedimensionaal, maar toch helpen zulke fascinerende vormen om iets wezenlijks duidelijk te maken: ruimte en tijd, die ouderwetse vier dimensies, zijn geen beperkingen van de natuur, maar van onze *voorstelling* van de natuur. In die rol had Immanuel Kant ze, na zijn bestudering van het werk van Newton, al in zijn kentheorie ingebouwd: als *a priori Anschauungsformen* namelijk, die nog voorafgaande aan onze feitelijke waarnemingen het kader bepalen waarbinnen die waarnemingen pas plaats kunnen vinden. Dat zo’n kader zich, dankzij reflectie op de opgedane ervaringen en inzichten, zelf ook weer verder zou kunnen ontwikkelen, is een mogelijkheid die Kant nog niet had voorzien.

Creativiteit in kunst en filosofie

En juist op zo’n interdisciplinair symposium als dit vind je dan de mensen die op de transformatie van

zulke kaders een voorschot weten te nemen. Zo was er Julie Tolmie, die wees op de relatie tussen wat zich in menselijke talen laat uitdrukken en ons onvermogen om ons een voorstelling te maken van de non-localiteit die door fenomenen in de quantumfysica wordt opgeroepen. Daarbij is de ene taal de andere niet, en zal dus ook de wijze waarop 'tijd' en 'ruimte' in de taal zijn verweven op verschillende manier mogelijkheden bieden om die beperkingen te doorbreken.
Ook bood het symposium een platform voor mensen die het belachelijk vinden dat er alleen wordt gespeculeerd over 3-, 4-, en in het algemeen *n*-dimensionale universa. Hoe zou een *pi-dimensionaal* universum er uitzien? Zo'n vraag is ook in historische zin nuttig omdat het je helpt in te zien hoe absurd in de Oudheid de suggestie moet zijn geweest dat er andere dan natuurlijke getallen (en hun verhoudingen) zouden kunnen bestaan. De suggestie kwam van Tatiana Bonch-Osmolovskaya, een van de meest veelzijdige deelnemers, die ook verraste met haar schaakborden waarin een stelling deels vanuit een normale gezichtshoek en deels vanuit een gezichtshoek van onder of achter het bord wordt weergegeven. Dezelfde Tatiana Bonch-Osmolovskaya hield ook nog een lezing over combinatorische literatuur (teksten die met behulp van formele regels uit andere teksten gedistilleerd worden), vanaf de *Ars magna* van Raymundus Lullus tot heden, en zij bleek vorig jaar de honderdduizend miljard gedichten van Queneau (*Cent mille milliard de poèmes*, 1961) in het Russisch te hebben vertaald. Dat lijkt een levenswerk, maar het valt mee als je bedenkt dat er slechts tien sonnetten hoeven te worden vertaald, waarna de overige $10^{14} - 10$ sonnetten zich laten construeren door per regel een keuze te maken voor de betreffende regel uit een van de eerste tien.

De publiekstentoonstellingen in het nieuwe Millenniumpark van Boedapest bleken minder verrassend dan de artistieke bijdragen die sommige sprekers in de gang naast de symposiumzalen hadden uitgestald. Aan een catalogus waren de organisatoren niet toegekomen, en wie een beetje vertrouwd was met het Hongaars constructivisme van de vorige eeuw, zag hier toch eerder een voortzetting van die traditie dan een verwerking van de uitdaging die het thema (dis)symmetrie wilde zijn. Dat gold eigenlijk ook voor de bijdragen van kunstenaars uit andere landen, waaronder met name de kunstenaars die verbonden zijn met de groep MADI (Movement/Abstraction/Dimension/Invention). Met deze wat hybride naam wordt een groep kunstenaars aangeduid die zich al in de jaren '40 van de vorige eeuw manifesteerde, en waarvoor het doorbreken van de traditionele kaders van de schilderkunst hoog op het verlanglijstje stond: in figuurlijke, maar vooral ook in letterlijke zin. Geen rechthoekige lijsten meer waarbinnen het kunstwerk zijn plaats heeft, maar vormen waarbij het verschil tussen binnen en buiten verdwenen is. Lege ruimtes en gedeconstrueerde vormen moeten de grens met de omgeving van het werk doen vervagen; veel werken bewegen zich (soms letterlijk: er waren diverse *mobiles* opgesteld) op de grens van twee- en drie-dimensionaliteit. MADI-kunst 'zwemt in haar omgeving zoals een vis in het water', aldus de huidige voorman van de beweging, de uit Uruguay afkomstige Carmelo Arden Quin. Fragmenten van elementaire veelvlakken zijn vaak nadrukkelijk aanwezig in deze abstracte kunst die zichzelf aanduidt als 'concrete kunst'.

De filosofische bijdragen aan het symposium waren gering in aantal en divers van aard. De Zuid-Afrikaan John Collier probeerde onder de noemer *Tetralectics* greep te krijgen op traditionele wereldbeelden, waarin vaak een 'symmetrische' indeling in twee maal twee categorieën te bespeuren valt, en die indelingen ook op de filosofie en de belangrijkste vertegenwoordigers daarvan toe te passen. Het fundament van zijn systematiek was ontleend aan een soort van integratie van jungiaanse psychologie en postmoderne logica. Klonk dat al niet zo veelbelovend, kwalijker was dat het Collier ontging dat de schijnbare inzichten die zijn model opleverde op niets anders neerkwamen dan een herhaling van de zelfgekozen parameters, terwijl de problemen die hij in zijn betoog signaleerde eveneens direct op die parameters terug te voeren waren. Het was, kortom, typisch zo'n model waar precies uitkomt wat je er zelf hebt ingestopt, en verder niets.
Veel meer to the point was de bijdrage van Giora Hon, die was nagegaan wat de eerdergenoemde Kant zelf precies over symmetrie te berde had gebracht in zijn *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* van 1768. Hon liet zien dat het symmetriebegrip dat Kant inzet in zijn argumentatie tegen de *analysis situs*, de nieuwe wiskundige benadering van de ruimte die Leibniz had bepleit, in de twintigste eeuwse Kantreceptie ten onrechte met het moderne symmetriebegrip is gelijkgesteld. Het gaat bij Kant echter niet om de (wiskundig begrepen) mogelijkheid van superpositie door transformatie, maar om een (vanuit de ervaring begrepen) gevoel van evenwicht in onze lichamelijke oriëntatie.
Ruth Lorand tenslotte betoogde dat symmetrie in de kunst niet alleen de traditionele rol van het verwerven van esthetische meerwaarde door het scheppen van orde vervult, maar ook een tegengestelde rol: de lage informatiewaarde van een volledig symmetrisch patroon maakt dat patroon te homogeen om esthetisch interessant te zijn.

De symmetrie doorbroken

Dat brengt me op het punt waar vrijwel alle wiskundigen, natuurwetenschappers én kunstenaars mee bleken in te stemmen: symmetrie is fascinerend en ook nog heel belangrijk, maar er is één ding wat nóg fascinerender is en bovendien letterlijk en figuurlijk van levensbelang, en dat is het (bij voorkeur subtiele) *doorbreken* van symmetrie. In veel lezingen weerklonk een echo van Richard Feynmans vraag uit 1962: *Why is nature so nearly symmetrical?* Robert Schiller legde uit dat er überhaupt geen leven op onze planeet

FIGUUR 3





FIGUUR 4

mogelijk zou zijn, als alles in de natuur symmetrisch geordend was en de natuur die symmetrische patronen niet aanvulde met uitgesproken voorkeuren voor linkse of rechtse varianten in de interactie van grotere moleculen, bijvoorbeeld van aminozuren en suikers. Schillers lezing maakte indruk doordat hij zijn *cutting edge* kennis van de biochemie vergezeld deed gaan van een diepgaande interesse in metaforische en mythologische voorstellingen van symmetrie. Moeiteloos sprong hij van Paulus' Eerste brief aan de Corinthiërs naar Umberto Eco, en stelde hij vast dat Narcissus toch echt gedwongen wordt tot een keuze: de ruimtelijke spiegelsymmetrie van zijn reflectie in het water (die *hij* aanbidt) kan nimmer samengaan met de temporele translatiesymmetrie (herhaling na tijdsverloop) van de nimf Echo (die *hem* aanbidt). Dat ook de bedreiging van het leven door kennis van biochemische symmetrie een halt kan worden toegeroepen bleek uit de bijdrage van David Avnir: dankzij kennis van het symmetrieprofiel van het HIV-virus is een aidsremmer ontwikkeld op basis van de verstoring van die symmetrie.

Dat pure symmetrie (en verder niks) in figuratieve vormen net zo snel verveelt als pure consonantie in de muziek bepaalde ook het lot van de Amerikaanse *senior citizen* Magnus Wenninger, de auteur van *Polyhedron Models*, die zich zes dagen lang niets van de lezingen aantrok, maar in de gang naast de symposiumzalen van gekleurd papier steeds dezelfde stellaties van regelmatige en halfregelmatige lichamen zat te knippen en te plakken, waarbij hij een benijdenswaardig soort van levensgeluk uitstraalde. Trokken zijn volkomen symmetrische figuren de eerste dag nog wel bekijks, na twee dagen was hij gereduceerd tot meubelstuk dat door iedereen vriendelijk werd toegeknikt.

Etno-mathematica

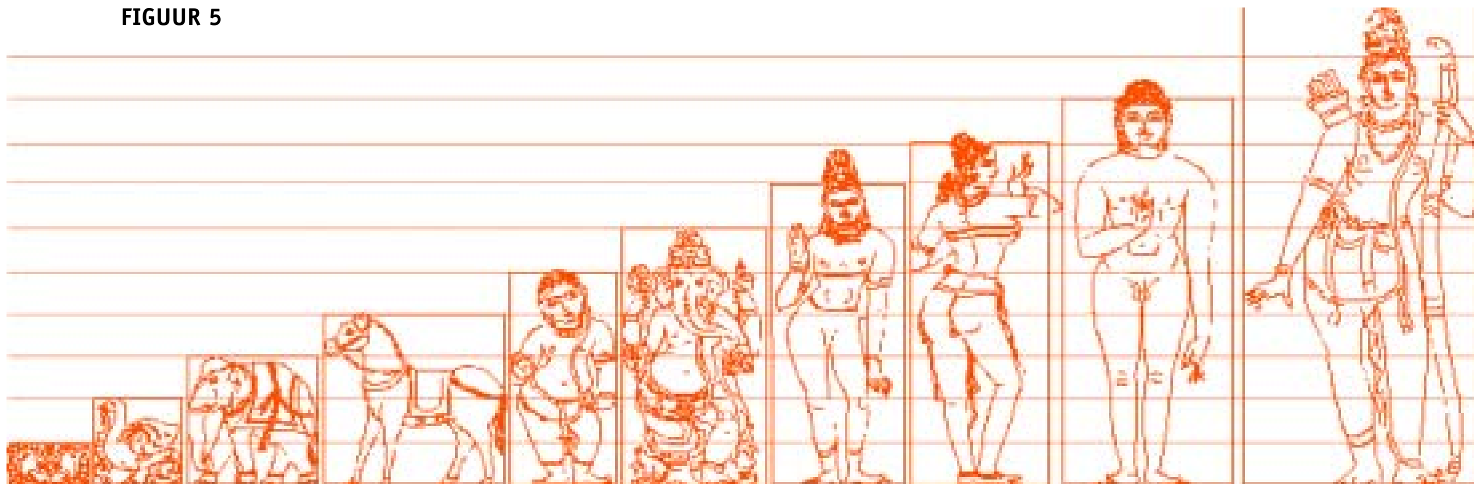
Een heel aparte en waardevolle bijdrage werd geleverd door de lezingen over symmetrie in de *etno-mathematica*, de wiskunde waar ook de culturele context in doorklinkt; abstracte Arabische, Afrikaanse en Aziatische patronen verraden al vrij snel uit welke context ze stammen, en vertonen vaak symmetrie-patronen die binnen die context karakteristiek zijn. Raymond Tennant herinnerde eraan dat de overdracht van wiskunde als 'cultureel erfgoed' tot de expliciete doelstellingen behoort van de Amerikaanse *National Council of Teachers of Mathematics*, een opdracht waar hij zelf gestalte aan geeft door zijn studenten vertrouwd te maken met de wiskunde die achter traditionele Arabische tegelpatronen schuilgaat (hij werkt in Aboe Dhabi), en ze deze patronen verder te laten ontwikkelen met behulp van minder traditionele wiskunde, zoals de groepentheorie.

Annegret Haake, auteur van *Javanische Batik – Methode, Symbolik, Geschichte*, legde uit hoe de noodzaak tot rationalisering van de productie van gebatikte doeken leidde tot het gebruik van stempel-blokken om de patronen op de stof aan te geven. Dat vraagt als het ware om symmetrie, door die blokken

een kwartslag of halve slag te draaien òf door hetzelfde blok ook op de andere kant van de stof te gebruiken. Soms komen de patronen pas door die symmetrie tot hun recht, en Haake liet een verrassend voorbeeld zien waarbij de 'pointe' van het patroon gemist werd doordat het blok niet tweezijdig werd gebruikt (figuur 3; vergelijk figuur 4 om te zien wat de bedoeling was).

Ramila Patel uit Swaziland bestudeerde de symmetriepatronen in de matten die daar gevlochten worden; in haar analyse volgt ze de theorie van Paulus Gerdes (Mozambique), die vanuit de gevlochten patronen greep probeert te krijgen op de manier van denken en voorstellen die door zo'n vormgegeven structuur wordt blootgelegd. Archetypische patronen als gelijkheid, variatie, verbinding en reflectie worden in de volkskunst van verschillende regio's op specifieke wijze ingevuld. Gerdes meent dat het geometrisch denken in Afrika begonnen is, zoals paleontologen

FIGUUR 5



hetzelfde beweren over de *species humana* in haar geheel.[3] Net als bij Tennant spelen ook bij Patel politiek-educatieve motieven een rol: vernieuwing van de samenleving vanuit een bestaande en authentieke traditie van vormgeving.

Maar de meest opvallende etnomathematische bijdrage kwam van Kirti Trivedi uit India. Ook de Indiase kunst is volgens hem meer op abstracte dan op concrete figuratie gebaseerd, en Trivedi liet in een indrukwekkende Powerpoint-presentatie zien dat ook waar wél van representerende kunst sprake is, er toch een rooster achter de voorstelling wordt gedacht waarbinnen alle maten als het ware tot de orde worden geroepen; de terminologie waarin hij de *Talamana* ('de maat van het ritme') presenteerde, de wijze waarop het onzichtbare alleen maar door de juiste ritmisering tot zichtbare schoonheid aanleiding kan geven, vertoonde verrassende overeenkomsten met het neoplatonisme uit de westerse traditie (zie figuur 5).

Splijting

Pais en vree dus in symmetrieland? Helaas niet. De ISIS (*International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry*) blijkt inmiddels in tweeën te zijn gespleten. Hoezeer dat ook bij dit interessegebied lijkt te passen, het is toch diep te betreuren dat naast de symmetrie zelf nu ook de samenwerking is doorbroken, zodat de beide redacteuren van het tijdschrift *Symmetry: Culture and Science*, György Darvas en Dénes Nagy, in een juridisch proces tegenover elkaar zijn komen te staan.[4] Voordeel is wel weer dat beiden zich nu voor de internationale gemeenschap proberen waar te maken: na het door Darvas (de leider van de nieuw gevormde *International Symmetry Association*[5] georganiseerde *Ars (dis)symmetrica 2003* is volgend jaar augustus in Brussel een manifestatie te verwachten die georganiseerd wordt door Dénes Nagy, die nu de ISIS beheert[6].

Noten

[1] Zie http://mathforum.org/dynamic/one-corona

[2] Deze hypervlakken of 'manifolds', die gelden als de mathematische representatie van de zes dimensies die de snaartheorie nog aan de gebruikelijke vier heeft toegevoegd, hebben tegenwoordig zelfs hun eigen website: www.math.okstate.edu/~katz/CY/. Hun wiskundige eigenschappen worden uitgelegd op http://mathworld.wolfram.com/ Calabi-YauSpace.html

[3] Informatieve websites over deze denkwijze zijn www.sciencenews.org/sn_arc99/11_27_99/mathland.htm en www.uni-muenster.de/EthnologieHeute/eh2/gerdes.htm

[4] Voor documentatie van het conflict, zie www.sirius-beta.com/ Miscellany/internationalsoc.html

[5] Zie http://us.geocities.com/symmetrion/

[6] Zie www.asa-art.com/isis/isis2.htm

Over de auteur

Albert van der Schoot (e-mailadres: A.vanderSchoot@uva.nl) studeerde muziekwetenschap en filosofie aan de Universiteit van Amsterdam, en muziekpedagogiek aan de Ferenc Liszt Academie in Boedapest. Hij doceert esthetica en cultuurfilosofie aan de Faculteit der Geesteswetenschappen van de Universiteit van Amsterdam.

°°*Het grote en het kleine* **ster-twaalfvlak van Kepler**

Als we de zijden van een regelmatige vijfhoek verlengen tot ze elkaar snijden, dan ontstaat een vijfpuntige ster. We zouden deze tot de regelmatige veelhoeken kunnen rekenen: een regelmatige *ster*vijfhoek. In figuur 1*a* is de vijfhoek, die het „bovenvlak" van een regelmatig twaalfvlak vormt, uitgebreid tot zo'n stervijfhoek. Als we dit bij elk der twaalf vlakken doen, ontstaat een zeer fraai lichaam waarop Kepler in 1619 de aandacht heeft gevestigd. In fig. 1*a* zien we rechts al een uitstekende punt

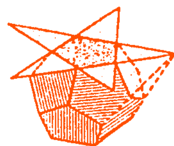


Fig. 1*a*

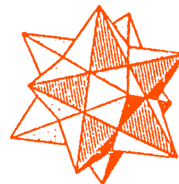


Fig. 1*b*

van dit lichaam ontstaan en in fig. 1*b* is dit (*kleine*) regelmatige stertwaalfvlak helemaal getekend. De twaalf vlakken, die dit lichaam begrenzen, zijn alle congruente regelmatige stervijfhoeken. We zouden het dus zo kunnen beschouwen, dat dit lichaam voldoet aan de definitie van regelmatig lichaam, zoals die in het vorige nummer werd gegeven, zodat ...

Kepler een nieuw regelmatig veelvlak aan de vijf klassieke toegevoegd zou hebben. Wie dit ster-twaalfvlak van stijf papier of karton wil maken doet het beste eerst een regelmatig twaalfvlak te maken en daarop twaalf piramiden te plakken, waarvan de uitslag gemakkelijk te tekenen is.

Het *grote* ster-twaalfvlak van Kepler kan men zich het best ontstaan denken uit een regelmatig twintigvlak. We kunnen in de figuur of foto van een icosaëder in het vorige nummer gemakkelijk controleren, dat de 5 bases van de in één hoekpunt samenkomende zijvlakken een regelmatige vijfhoek vormen. Deze kan weer tot een regelmatige stervijfhoek worden uitgebreid, zoals in fig. 2*a* te zien is. Er zijn 12 zulke regelmatige



Fig. 2*a*

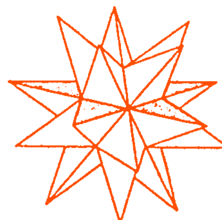


Fig. 2*b*

vijfhoeken te vinden aan een regelmatig twintigvlak. In fig. 2*b* zien we het lichaam, dat ontstaat als elk dezer vijfhoeken wordt uitgebreid tot een stervijfhoek. Men kan dit lichaam het gemakkelijkst maken door eerst een regelmatig twintigvlak te maken en daarop 20 piramiden te plakken.

Elk der beide figuren worden ster-*twaalf*vlakken genoemd. Ze hebben echter veel meer zijvlakken, de eerste telt er $12 \times 5 = 60$ en het tweede $20 \times 3 = 60$. Vat men echter elke vijfpuntige ster op als één begrenzend vlak, dan komt men inderdaad voor beide figuren op 12 vlakken.

Uit: Pythagoras, jaargang 3 (1963-1964)

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).

Aftelversje

[Rob Bosch]

In het prachtige boekje De Nederlandse Wiskunde Olympiade dat ongeveer een jaar geleden verschenen is, vinden we de volgende opgave[1]:

In een kring staan n personen P_1, P_2, ... , P_n, waarbij n groter is dan 20. Nu begint een aftelspelletje met de woorden 'ga weg', te beginnen met P_1. Wie met 'weg' wordt aangeduid is af en verdwijnt uit de kring. Zo verdwijnen achtereenvolgens P_2, P_4, ... enzovoort. Tenslotte blijkt alleen P_n overgebleven te zijn. Bepaal de kleinste waarde van n waarvoor dit het geval is.

Het bovenstaande probleem is uiteraard eenvoudig op te lossen als we voor iedere n snel kunnen zien welke persoon overblijft. Voor kleine n kunnen we die persoon door aftellen bepalen. Dat levert de volgende tabel op waarin $O(n)$ het nummer is van de persoon die overblijft.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$O(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5

Voor grote waarden van n kunnen we de overblijvende persoon met behulp van een recursie bepalen.

Bij 10 deelnemers verdwijnen in de eerste ronde de even nummers. Na de eerste ronde ontstaat er dus een kring met nog 5 deelnemers genummerd 1, 3, 5, 7 en 9. In de kring met vijf mensen met nummers 1 t/m 5 blijft volgens de bovenstaande tabel nummer 3 over. Bij 10 deelnemers blijft dus de persoon over die na de eerste ronde dezelfde positie inneemt als deze nummer 3. Dat is bij 10 deelnemers dus nummer 5 (zie figuur 1). Merk op dat de kring na de eerste ronde 5 personen telt waarbij iedere persoon een nummer heeft dat verkregen wordt door de nummers 1 t/m 5 te verdubbelen en er daarna 1 van af te trekken. Weten we welk nummer overblijft in een kring van 5, dan kunnen we eenvoudig uitrekenen welk nummer in een kring van 10 overblijft.

In een kring van 6 blijft nummer 5 over en dus zal in de kring met 12 personen nummer $2 \cdot 5 - 1 = 9$ overblijven. In het algemeen geldt dat, als in een kring van n personen nummer $O(n)$ overblijft, dan in de kring met het dubbel aantal deelnemers nummer $2O(n) - 1$ overblijft. We vinden zo de volgende recursie:

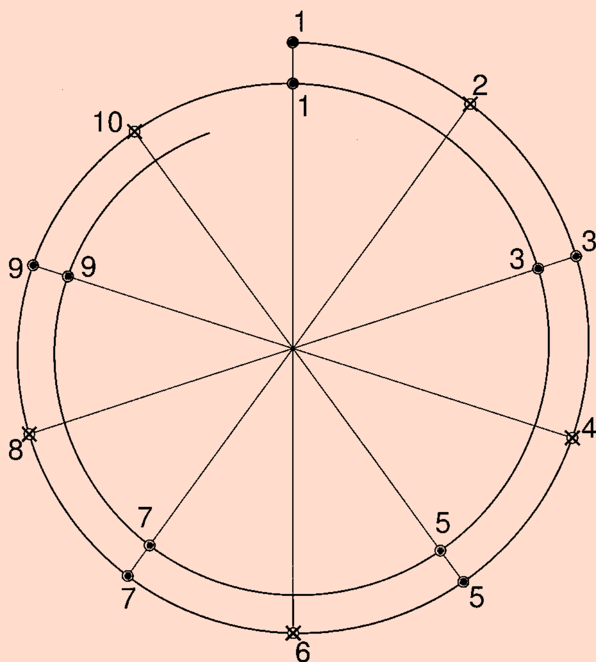
$$O(2n) = 2O(n) - 1, \quad n \geq 1$$

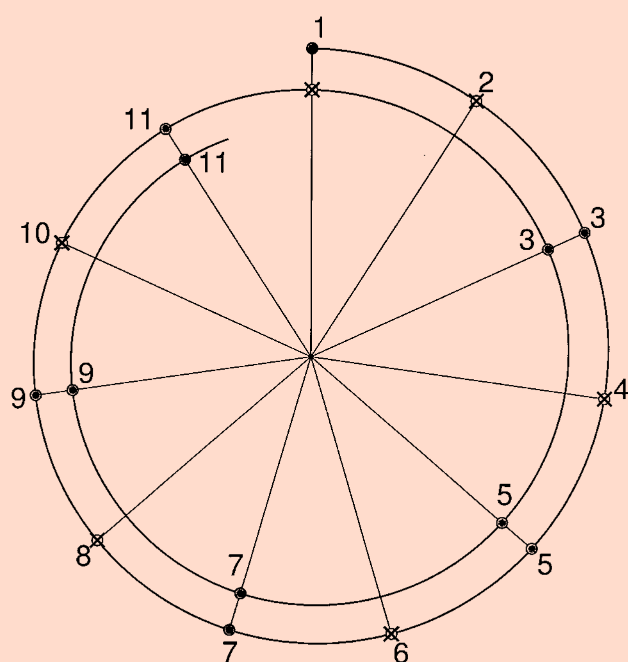
Dit is een zeer efficiënte recursie aangezien het aantal bij iedere stap gehalveerd wordt. Voor een kring met 56 deelnemers vinden we snel:

$O(56) = 2O(28) - 1 = 2(2O(14) - 1) - 1 = 4(2O(7) - 1) - 3) = 8O(7) - 7$

Aangezien $O(7) = 7$ vinden we $O(56) = 56 - 7 = 49$.

Voor een oneven aantal personen $2n + 1$ vinden op een soortgelijke wijze een efficiënte recursie. Nadat in de eerste ronde weer alle even nummers zijn weggestreept (zie figuur 2), wordt nummer 1 geëlimineerd waarna een kring van n deelnemers genummerd 3, 5, ... , $2n + 1$ overblijft. We krijgen weer een kring van n personen met dien verstande dat alle nummers





FIGUUR 1 $O(2\cdot 5) = 2O(5) - 1$

FIGUUR 2 $O(2\cdot 5 + 1) = 2O(5) + 1$

verdubbeld zijn en er vervolgens 1 bij opgeteld is. Voor een oneven aantal vinden we dus

$O(2n+1) = 2O(n) + 1,\ n \geq 1$

Samengevat gelden voor ons probleem de volgende relaties:

$$O(1) = 1$$
$$O(2n) = 2O(n) - 1$$
$$O(2n+1) = 2O(n) + 1$$

Met behulp van deze recursies kunnen we voor grote n snel de overblijvende persoon vinden.
Uit $O(1) = 1$ volgt dat $O(2) = 2O(1) - 1 = 1$ waaruit we afleiden dat
$O(4) = 2O(2) - 1 = 2 - 1 = 1$
waarna we voortzetten met
$O(8) = 2O(4) - 1 = 2 - 1 = 1$
Herhalen we deze verdubbelingen dan volgt
$1 = O(1) = O(2) = O(4) = O(8) = O(16) = \ldots = \ldots$
In het algemeen geldt dus

$O(2^n) = 1$

Hieruit leiden we nu gemakkelijk af dat
$O(2^n + 1) = 2O(2^{n-1}) + 1 = 2 + 1 = 3$
en
$O(2^n + 2) = O(2(2^{n-1} + 1)) = 2O(2^{n-1} + 1) - 1 = 2\cdot 3 - 1 = 5$
waarna volgt
$O(2^n + 3) = 2O(2^n + 1) + 1 = 2\cdot 3 + 1 = 7$
Zo verdergaand ontdekken we een patroon dat zichtbaar wordt in de volgende tabel

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$O(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

Uit de tabel komt de volgende relatie naar voren

$O(2^n + l) = 2l + 1$ met $0 \leq l < 2^n$

Een relatie die de lezer eenvoudig met inductie kan bewijzen. Met deze relatie kunnen we nu direct de overblijvende persoon in een kring van 56 vinden:
$O(56) = O(2^5 + 24) = 2\cdot 24 + 1 = 49$
Met de bovenstaande relatie zal de Olympiade-opgave geen probleem meer zijn.

Welke persoon overblijft als we het rijmpje veranderen in ‘ga nu weg’ laat ik graag aan de lezer over.

Literatuur

[1] Jan van de Craats (red.): De Nederlandse Wiskunde Olympiade, Stichting NWO (2002), p. 40, opgave 57 (Olympiade 1992-B3).
[2] Saber N. Elaydi: An Introduction to Difference Equations, Springer Verlag (1995).

Over de auteur

Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.

GEACTUALISEERD OVERZICHT NIET-CE-STOF HAVO EN VWO

[Marja Bos]

Begin oktober 2003 heeft de CEVO de (sub)domeinen aangewezen waarover bij de Centrale Examens havo en vwo 2006 en 2007 geen vragen gesteld zullen worden. Het blijkt hierbij om dezelfde CEVO-aanwijzingen te gaan als die voor de Centrale Examens 2004 en 2005. De school bepaalt voor dit soort onderdelen zelf, of (en zo ja, op welke wijze) ze in het SchoolExamen aan de orde komen.
Daarnaast was eerder ook al diverse malen sprake van allerlei andere tijdelijke verlichtingsmaatregelen, permanente aanpassingen en dergelijke.

Volledigheidshalve volgt hier het geactualiseerde overzicht.
Voor nadere informatie zie onder meer *http://examenblad.kennisnet.nl*, de ‘Regeling aanwijzing niet c.e.-stof profielen 2006 en 2007’ (kenmerk: CEVO-03-595, dd 2 oktober 2003), en uiteraard *www.nvvw.nl* (via ‘Examens’ doorklikken naar ‘Regelingen e.d.’).

	Onderdeel	CE	SE	Geldigheid
havo A1	Alle domeinen	nee	ja	tot nader order
havo A12	Subdomein: Bundels van grafieken en 3-dimensionale grafieken (71-72)	nee	eigen keuze	examens 2004 t/m 2007
	Subdomein: De binomiale verdeling (87-90)	nee	eigen keuze	examens 2004 t/m 2007
havo B1	Domein: Ruimtemeetkunde 1	nee	ja	tot nader order
	Subdomein: Periodieke functies (64-73)	nee (*)	eigen keuze	examens 2004 t/m 2007
havo B12	Domein: Tellen en kansen	nee	ja	tot nader order
	Subdomein: Periodieke functies 2 (99-103) (*)	nee	eigen keuze	examens 2004 t/m 2007
vwo A1	Eindtermen 3, 10 (w.b. rekenregels logaritmen), 13, 23 en 24	nee	nee	tot nader order
	Domein: Grafen en matrices	nee	eigen keuze	examens 2004 t/m 2007
	Subdomein: Het toetsen van hypothesen (147-150)	nee	eigen keuze	tot nader order
vwo A12	Eindtermen 3, 10 (w.b. rekenregels logaritmen), 13	nee	nee	tot nader order
	Domein: Grafen en matrices	nee	eigen keuze	examens 2004 t/m 2007
	Subdomein: Ruimtelijke objecten	nee	nee	tot nader order
	Domein: Keuzeonderwerp	nee	ja	tot nader order
vwo B1	Domein: Continue Dynamische Modellen	nee	ja	tot nader order
	Domein: Keuzeonderwerp	nee	ja	tot nader order
vwo B12	Domein: Continue Dynamische Modellen	nee	ja	tot nader order
	Domein: Keuzeonderwerp	nee	ja	tot nader order
	Eindtermen 140-144, 151-153, 167-175	nee	nee	tot nader order

(*) N.B. Het subdomein ‘Periodieke functies’, eindtermen 64 t/m 73, behoort wèl tot de examenstof van havo wiskunde B12.
CE = centraal examen; SE = schoolexamen. De getallen tussen haakjes verwijzen naar eindtermen.

Aankondiging / HKRWO-Symposium 2004 Symposium X van de Historische Kring Reken- en Wiskunde Onderwijs

Tijd en plaats
15 mei 2004, 10.15 - 16.00 uur
Hogeschool Domstad te Utrecht (Koningsbergerstraat 9)

Deelname
Maak € 22,00 over op postgirorekening 4657326 t.n.v. HKRWO te Amsterdam (koffie, thee en lunch inbegrepen).

Thema
Van Oude Maten en het Nieuwe Meten; elementen uit de geschiedenis van het meetonderwijs in Nederland en Engeland.

Programma
Danny Beckers (Katholieke Universiteit Nijmegen):
Van oude maten, de dingen die voorbijgaan
De introductie van het metrieke stelsel in het Nederlandse onderwijs, 1820-1850.

Edu Wijdeveld (oud-directeur IOWO):
Heb de natuur lief
Over leven en werk van Marcel Minnaert (1893-1970) naar aanleiding van diens biografie van Leo Molenaar.

Iris Gulikers (Rijksuniversiteit Groningen):
De 17de-eeuwse Nederlandse landmeter: vroeger en nu
Leerlingen van nu worden landmeter van toen.

Ed de Moor (Freudenthal Instituut Utrecht):
Freudenthals opvattingen over meetonderwijs
Meten in het basisonderwijs sinds 1970, leerlijnen en doelen anno 2004.

Peter Ransom (The Mountbatten School and Language College, Romsey, Hampshire): *A Metre of Mars – how does the Metric System Measure up?*
Measuring in old English text books and recent classroom activities.

En verder
Tentoonstelling van oude boeken en materialen over het meetonderwijs. Eenieder is uitgenodigd om een poster op te hangen en/of iets te exposeren.

HKRWO
Freudenthal Instituut, Postbus 9432, 3505 GK Utrecht, telefoon 030-2635555.
Inlichtingen: *e.demoor@fi.uu.nl*, *beckers@inter.nl.net*, *s.eerhart@fi.uu.nl* of Ed de Moor: 020-6121382.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verenigingsnieuws
Van de bestuurstafel

[Marian Kollenveld]

Tweede fase havo/vwo, de soap gaat door

De Amerikanen hebben er een woord voor: 'math phobia', de aandoening die sommigen overvalt als ze in de buurt van wiskunde dreigen te geraken, een totale psychische blokkade, waarbij elk logisch nadenken onmogelijk wordt.
Onze minister en haar departement lijken hiervan ernstig last te hebben. Niet alleen ontstak de minister tijdens een overleg waar wij bij waren, spontaan in woede bij het noemen van het wiskundewoord, de plannen voor de Tweede fase lijken nog louter bedoeld om de exacte vakken af te straffen, met wiskunde voorop. De herziene plannen zijn onverminderd slecht voor wiskunde.

Brief van het NVvW-bestuur

Omdat de minister in haar brief ook nog blijk gaf volstrekt niet op de hoogte te zijn van het hedendaagse wiskundeonderwijs en zij niet meer van zins is met het veld te praten, heeft het bestuur wederom een brief naar de leden van de vaste Kamercommissie voor Onderwijs gestuurd, met de volgende inhoud:

Geachte heer/mevrouw,

Op 4 december jl. presenteerde de minister haar nieuwe voorstellen voor de Tweede fase. Het bijgeleverde rekenmodel zag er netjes en overzichtelijk uit, de getallen kloppen. Maar daarmee is het dan ook gezegd. Het rekenmodel regeert, de gekozen structuur leidt ertoe dat alle vakken in omvang ongeveer gelijk worden. Dat betekent dat kleine vakken worden vergroot, bijvoorbeeld LO2 (nieuw bètavak in NG) gaat van 280 naar 440, informatica gaat van 280 naar 420, en grote vakken worden verkleind, bijvoorbeeld wiskunde-NT-vwo van 760 naar 520, in havo-NT van 440 naar 320. Procrustes in de Hoftoren ...
Een inhoudelijke onderbouwing ontbreekt, maar de gevolgen zijn zeer ingrijpend. Egalitair Nederland op z'n ergst. Wiskunde wordt *voor alle leerlingen* (behalve havo-CM) een vak met ongeveer 2 wekelijkse lessen. Nederland is daarmee uniek in de wereld. In de landen om ons heen worden 5, 6 of zelfs 8 wekelijkse lessen aan wiskunde besteed in de B-stroom. Wat dat betekent voor de toekomstige concurrentiepositie van ons land en onze leerlingen in internationaal verband is niet zo lastig te bedenken. Door deze plannen te aanvaarden bent u medeverantwoordelijk; wilt u dat ook zijn?

Na die reductie is het resultaat onder meer:
- Een havo-leerling (CM) die naar de pabo gaat, heeft geen wiskunde meer in het pakket; toch lastig als je later kinderen rekenles moet geven.
- Een vwo-leerling die kunstgeschiedenis gaat studeren, krijgt meer wiskunde dan een havo-leerling die naar het technisch vervolgonderwijs wil.
- Elke leerling krijgt 2 hooguit 3 lesjes wiskunde in de week. Dat is voldoende als je geen ambities in die richting hebt, maar volstrekt onvoldoende voor elke vervolgopleiding waarvoor wiskunde een relevant vak is. Het gaat daarbij niet alleen puur om de wiskundekennis, een gebrek aan vaardigheden in het hanteren van abstracties, maar het werkt door in alle beroepsvakken waarbij die wiskundekennis bekend en noodzakelijk wordt verondersteld.

Met deze plannen gooit de minister dus het hele hoger onderwijs in bèta en techniek over de schutting. Het schrappen van natuurkunde als verplicht vak in het NG-profiel geeft nog een extra zetje. Het is onbegrijpelijk dat deze plannen komen van hetzelfde departement waar men werkt aan het deltaplan voor bèta en techniek.

> Citaat uit de brief van de Minister van OCenW aan de voorzitter van de Tweede Kamer (VO/OK/2003/53723, 4 december 2003)
>
> [...] Die nieuwe profielen zijn echter niet meer dan een begin. In het onderwijs in de bètavakken zelf is ook een vernieuwing nodig: in de inhoud, de aanpak/didactiek, waarschijnlijk ook in de cultuur in en rond de vakken. Ik vind het belangrijk, daarmee zo snel mogelijk te beginnen en dus daarmee niet te wachten tot de invoering van de nieuwe profielen per 1 augustus 2007. Er moet wel een duidelijk onderscheid worden gemaakt in wat haalbaar is op de korte, de middellange en de lange termijn. [...]

In de brief naar de Kamer toont de minister een schrijnend gebrek aan kennis van het huidige wiskundeonderwijs. Wiskunde wordt weggezet als iets ouderwets wat nodig gemoderniseerd moet worden. De waarheid is een andere: de laatste 20 jaar is geen vak zo grondig vernieuwd als de wiskunde, in onder- en bovenbouw. Inhoud, didactiek, ict, keuzeonderwerpen, praktische opdrachten: het is de minister allemaal ontgaan.

Voor de Tweede fase werden 8 nieuwe programma's ontworpen, sommige daarvan (wiskunde-NT-vwo) waren zo nieuw dat er enige jaren experiment (betaald door de minister) aan vooraf moesten gaan. De minister stelt nu weer 5 nieuwe programma's voor.

Wiskunde is nuttig en nodig voor iedereen in de huidige maatschappij. Als algemene ontwikkeling voor iedereen om je staande te houden in de wereld van alledag met een overvloed aan cijfermatige informatie, en daarnaast als noodzakelijke voorkennis voor een studie, afhankelijk van de gekozen richting.
Deze analyse geeft ook meteen een oplossing, zoals we al eerder hebben bepleit, in onze oktoberbrief en recent nog in de bètamotie (de andere punten daarin zijn: natuurkunde verplicht in het NG-profiel, het nieuwe bètavak verplicht in NT, ANW ook in het gemeenschappelijk deel van de havo):

Zorg voor een goede algemene basiskennis van de wiskunde voor iedereen door basiswiskunde in het gemeenschappelijk deel te plaatsen.

Dat neemt de overlap weg die nu noodzakelijkerwijs in de profielwiskundes zit, en geeft ruimte om de wiskunde in de profielen toe te snijden op het profiel.
Een eenvoudige ingreep waarmee de problemen voor wiskunde zijn opgelost. In combinatie met de andere punten ontstaat er dan een helder en aangenaam bèta-klimaat waarin vernieuwing, verdieping en afstemming mogelijk zijn.

Ter herinnering: De herziening was vooral ingegeven door de wens om het probleem met de deeltalen op te lossen. Overladenheid is geen probleem meer, de versnippering wordt niet minder, integendeel, als alle vakken voor 2 uur op het rooster staan krijg je een heel versnipperd onderwijsaanbod.
De minister heeft het probleem met de deeltalen inmiddels opgelost door scholen in het huidige systeem niet meer te verplichten alleen leesvaardigheid te onderwijzen. Toch komt ze met een ingrijpende, ons inziens overbodige, structuurwijziging, waarbij bijna elk vak in omvang wordt veranderd en als gevolg waarvan de exacte vakken worden geofferd.
Dat alles vraagt weer veel tijd voor organisatie en plannen, tijd die afgaat van het verbeteren van de inhoudelijke kwaliteit van het onderwijs. Daar is het zo langzamerhand ook wel tijd voor.

Waar is de balans tussen doel en middelen, tussen vorm en inhoud?

We hopen dat u als Kamerlid deze balans wat beter in het oog zult houden en de minister dwingen op haar heilloze schreden terug te keren. Onze hoop is op u gevestigd.

Einde brief.

Actie

Daarnaast is de actielijn weer opgepakt, de Boze Bèta's zijn terug. In samenwerking met o.a. het platform voor natuurkunde hebben we een *bètamotie* opgesteld met daarin voornoemde actiepunten. Deze motie is te vinden op de bekende sites, waaronder *www.nvvw.nl*.
Voor deze motie is inmiddels veel steun gevonden: Philips, het KIVI (ingenieursvereniging), TU's van Delft en Eindhoven, medische opleidingsdirecteuren van alle geneeskunde-, diergeneeskunde- en tandheelkundefaculteiten, het discipline-orgaan Natuur en Techniek van de VSNU, de Kamers voor de scheikunde, de natuurkunde, de sterrenkunde van de VSNU, hbo technische natuurkunde, natuurlijk uw eigen NVvW en het Koninklijk Wiskundig Genootschap, enz. enz. De AOb (vakbond), de Besturenraad (schoolleiders) en VNO-NCW (ondernemers) hebben inmiddels negatief op de voorstellen gereageerd.

Soms zie je pas dat je in een optimum bent, als er geen verbetering mogelijk is. Er is inmiddels meer dan twee jaar vergeefs geprobeerd een betere structuur te bedenken. Misschien is wat we nu hebben dus wel het optimum. Stel je voor dat de Kamer dit ook vindt. Wat een rust! Geen nieuwe wet- en regelgeving, geen nieuwe programma's voor bijna alle vakken, geen nieuwe doorstroomeisen, geen tijdverspillen, maar gewoon aan het werk.

Ik wens u en ons dus in dit opzicht een 'rustig nieuwjaar' toe.

Jaarrede uitgesproken door Marian Kollenveld op de jaarvergadering van 15 november 2003

Het vreselijke w-woord

Er is zelden zo'n continuïteit geweest als tussen vorig jaar en nu. Vorig jaar begon ik de jaarrede met de liefde voor ons vak en hoe hard je die nodig hebt als het vak bedreigd wordt, we eindigden in de rondvraag met een oproep aan het bestuur om actie te ondernemen en een oproep aan beleidsmakers om naar onze argumenten te luisteren.
Je zou kunnen zeggen dat we het hele jaar bezig geweest zijn die oproepen uit te voeren. In het voorjaar hebben we een aantal malen op het ministerie overlegd en half oktober mochten we zelfs met de minister praten. Er is dus naar ons geluisterd, maar een minister die allergisch is voor het vreselijke w-woord, overtuig je niet zo makkelijk. Het argument dat zij hanteert, dat wiskunde leuker en aantrekkelijker wordt als je het vak kleiner en makkelijker maakt, kan alleen maar worden gebruikt door iemand met laat ik zeggen een beeld van het vak dat niet direct het onze is. Dat verander je niet door te zeggen dat het niet zo is, dat wiskunde vaak juist leuker wordt als je het meer doet, en er meer van kunt; dat komt niet over.
Maar laat ik niet aan het eind beginnen.

Publiciteit

Op 9 januari kwam de minister met haar plannen voor de herziening van de Tweede fase. We vonden dat om meerdere redenen slechte plannen, maar we waren vooral verbijsterd door de grote reducties voor de exacte vakken, met wiskunde voorop. Inhoudelijk was het niet anders onderbouwd dan ik hierboven al aangaf.
We hebben toen in eerste instantie vooral veel lawaai gemaakt, brieven en artikelen naar de kranten gestuurd, die overigens in het begin niet of nauwelijks geplaatst werden, zeer uitgesproken interviews gegeven, zodat door die emotie duidelijk werd dat er echt iets aan de hand was. We hebben in het begin de nuance geschuwd en vooral wild om ons heen geslagen. Er was vrijwel meteen een goede samenwerking met de collega's van de andere bètavakken: de NVON, Nederlandse vereniging voor onderwijs in de natuurwetenschappen, en het NPN, het Nederlands platform voor natuurkunde. Toevallig had mijn collega natuurkunde Arjan van der Meij een website gekregen, en hij was ook heel boos, zodat de BozeBèta-site snel geboren was. Een machtig wapen, waar we heel veel profijt van hebben gehad. Door de prima samenwerking tussen onze eigen website, de WiskundEbrief, de BozeBèta- en de NVON-site konden we snel en adequaat reageren op de ontwikkelingen, en iedereen voortdurend op de hoogte houden.

Tegelijkertijd hebben we al onze kanalen gebruikt om anderen te attenderen op de dreigende afbraak van de bètavakken in het voortgezet onderwijs en de maatschappelijke gevolgen daarvan. Want dat leraren boos zijn als hun vak wordt afgebroken, is namelijk volstrekt voorspelbaar en niet per se relevant voor de rest van de wereld. Maar er was nu iets heel anders aan de hand, de gevolgen van met name slecht of onvoldoende wiskundeonderwijs reiken verder dan de school, het raakt de toekomstige ontwikkeling van ons land, onze maatschappij en onze zo dierbare economie, die maar geen kenniseconomie wil worden. Sja, dat gaat niet op bevel, daar moet je iets voor doen, investeren in onderwijs bijvoorbeeld.

...ook het bedrijfsleven wil goed opgeleide bèta's

Die boodschap is goed overgekomen. Er is een ware lawine ontstaan van artikelen in de krant, tot en met hoofdredactionele commentaren aan toe, er zijn legio brieven naar de minister en de kamerleden gestuurd, het dossier is inmiddels enige decimeters dik. Ook de radio heeft er een aantal malen aandacht aan besteed, een discussie in een tv-programma ging niet door omdat er - naar verluid - niemand te vinden was om de plannen te verdedigen. Misschien is dit pure roddel, maar het is te leuk om niet te vermelden.
Velen mengden zich in het debat: er kwam een ongevraagd advies van de Onderwijsraad, een spoedadvies van de Koninklijke Academie van Wetenschappen, bèta-organisaties van buiten het onderwijs lieten van zich horen, en heel belangrijk: ook het bedrijfsleven liet weten belang te hechten aan goed opgeleide bèta's en deze plannen dus af te keuren.

Winst

Dat was de eerste lijn, het mobiliseren van de publieke opinie. Hierover kunnen we tevreden zijn. De winst van het geheel is denk ik bewustwording, velen die daar nooit eerder over hadden nagedacht zijn zich bewust geworden van het maatschappelijk belang van goed onderwijs in de bètavakken en hebben hopelijk ook het daarbij behorende inzicht opgedaan dat je daarvoor goed opgeleide, gemotiveerde docenten nodig hebt, die je de ruimte moet geven hun vak uit te oefenen. We gaan proberen dit vast te houden. In elk geval zijn de contacten met het vervolgonderwijs verstevigd, zijn er plannen tot het oprichten van een aansluitingsplatform ho/vo, hebben we onze zusterorganisaties beter leren kennen, en zijn we zichtbaar geworden in brede kring.

Steun

De andere lijn was de lastigste. Gelijk hebben is een ding, dat hadden we wel, gelijk krijgen is de kunst. Daarvoor hebben we een bètakwartet gevormd, bestaande uit Boze Bèta's, NVON, NPN en NVvW. En een eigen elegant alternatief plan opgesteld, waarmee we de boer op zijn gegaan. Met wisselend succes.
Gesprekken op het ministerie leidden niet tot enig resultaat, de nieuwe voorstellen die we te zien kregen waren dusdanig dat we het gesprek hebben afgebroken - u hebt ook dat op de site kunnen lezen. Bij de vakbond hadden we meer succes: het AOb-standpunt is een heel eind in onze richting opgeschoven, overigens mede dankzij de stevige inbreng van sommigen van u op de ledenraadplegingen. Daar waren ze wel van geschrokken. De schoolleiders staan deels aan onze kant, deels niet; voor de politieke partijen geldt hetzelfde. Pikant hierbij is de positie van de VVD, die ons vóór de formatie ruimhartig steunde: volgens de heer Zalm stonden er 28 kamerzetels achter ons, meer had hij niet. Die steun is helaas na de formatie aanmerkelijk minder uitgesproken. Ach, zo gaat dat kennelijk.

In ons slotoffensief de laatste weken voor het besluitvormend overleg in de Kamercommissie op 29 oktober hebben we nog druk uitgeoefend via mails en zo breed mogelijke gezamenlijke brieven, er was een hoorzitting van de Kamercommissie, een tweede hoorzitting van de PvdA, een gesprek met de minister, en na een oproep in de WiskundEbrief en op de sites zijn er meer dan 500 mailtjes naar Kamerleden gestuurd, waarvoor we zeer erkentelijk zijn. Het is heel fijn te merken dat je niet alleen staat in de strijd.
Het resultaat kent u: we hebben niet verloren, de minister zag in dat ze haar plannen er zo niet door zou krijgen, maar gewonnen hebben we ook nog niet. Ze heeft nieuwe plannen beloofd, maar we zijn bang dat de nieuwe voorstellen erg op die door ons afgewezen voorstellen zullen lijken, en dat bèta onverminderd het kind van de rekening blijft.

Komende tijd

We hebben daarom de strijdbijl nog niet begraven. De komende tijd richten we ons wat wiskunde betreft op het invoeren van basiswiskunde in het gemeenschappelijk deel. Daarnaast handhaven we de punten: herkenbare profielen met natuurkunde in NG en voortgezette wis/natuurwetenschappen in NT, ANW voor iedereen en profielcommissies voor de inhoudelijke afstemming. We hebben ons ook brutaalweg alvast aangemeld voor de profielcommissies, als ze er komen.
Natuurlijk hadden we het afgelopen jaar het liefst al aan inhoudelijke vernieuwing gewerkt. Nu het gedoe rond de invoering van de Tweede fase achter de rug is, waren we daar aan toe. Maar het mocht niet zo zijn, jammer, dat gaan we het komend jaar dus maar doen.
Terugkijkend kunnen we concluderen dat veel van de ellende ons allen (en dat is inclusief minister en kamerleden die bedolven zijn onder de protesten) bespaard had kunnen blijven als we in een eerder stadium bij de besluitvorming waren betrokken en onze argumenten toen hadden kunnen geven.

De docent als gesprekspartner

De inzet van het bestuur de komende jaren zal dus blijven: proberen de docent op het juiste niveau als gesprekspartner geaccepteerd te krijgen. Te vaak nog wordt de discussie over onderwijs als vanzelfsprekend gevoerd door mensen buiten het onderwijs. Het praat vast makkelijker, maar wat heb je eraan? Er zijn inmiddels veel bewijzen dat het zo niet werkt; wij noemen slechts Basisvorming, vmbo en Tweede fase.
Dat moet anders, maar het betekent wel dat wij, docenten, moeten afleren om uitsluitend over ons eigen vak te praten, we moeten leren durven verder te kijken en het over onze visie op onderwijs en leren in bredere zin te hebben. Want, geloof me, ook op dat terrein hebben we meer dan gemiddelde expertise.
In de lustrumrede zei ik: 'Geef de docent zijn vak terug.' In het licht van heden formuleer ik het wat assertiever: 'Docent, pak je vak terug; de tijd is er rijp voor, de retoriek is er al!'
In diverse publicaties, zoals in het voorstel van de profielcommissies van de KNAW, in het deltaplan voor het onderwijs, in het actieplan van Axis, is te lezen dat de docent een cruciale factor is voor goed onderwijs, voor vernieuwing die werkt.
Laten we dus de kans grijpen om zelf

aan de slag te gaan en niet wachten tot anderen iets bedenken wat wij dan moeten doen.

Allereerst het vmbo

Hier lijkt in de toekomst meer ruimte te komen voor een eigen invulling van het onderwijs. De kerndoelen van de Basisvorming worden sterk gereduceerd en vragen om een andere invulling, hoe is nog niet precies duidelijk.
Maar er zijn nu al scholen bezig om hier vorm aan te geven. We vragen speciale aandacht voor de zwakste leerlingen die de school binnenkomen met een leerachterstand. Zij zijn gebaat met een eigen programma, inclusief examinering. De school moet capabel worden geacht om deze leerlingen een portfolio mee te geven op grond waarvan hun mogelijkheden zijn omschreven. Voor de wiskunde betekent dat volgens ons een programma dat in eerste aanleg is gericht op sociale redzaamheid in een setting van gecijferdheid. Daarna kan de wiskunde voor alle leerlingen meer worden afgestemd op de door de leerling gekozen sector. Stages, eigen onderzoek en praktische opdrachten geven veel mogelijkheden om de wiskunde zichtbaar te maken in de praktijk. Aanpassing van het lesmateriaal is onontbeerlijk, maar gezien de huidige taakbelasting kan de docent daar niet zelf voor zorgen.
In de uitlijning van het curriculum zal rekening gehouden moeten worden met de aansluiting op het vervolgonderwijs en de kwalificatiestructuur.

In opdracht van het ministerie zal de SLO de komende maanden werken aan een vakdossier voor het derde en vierde leerjaar vmbo. De huidige situatie wordt in kaart gebracht, waarna met inschakeling van het veld nagedacht zal worden over de gewenste toekomst. Het bestuur is hierbij direct betrokken.

Havo/vwo

De SLO voert momenteel op verzoek van de vereniging op twee scholen voor havo/vwo een project uit op het gebied van algebraïsche vaardigheden en het mogelijke nuttig gebruik van computeralgebra daarbij. Het project zal waarschijnlijk worden afgesloten met een conferentie om de resultaten te presenteren.
De SLO zal naar alle waarschijnlijkheid ook meewerken aan de programmatische uitwerking van de plannen van de minister met de Tweede fase. Het spreekt vanzelf dat hierbij dan ook de vereniging betrokken zal worden.

Hbo

In het hbo is de beleidsvrijheid van besturen al zo groot dat de wiskunde uit veel opleidingen dreigt te verdwijnen. Hier kunnen we ons vak terugpakken door middels een vakinhoudelijke vernieuwing de noodzaak van wiskunde voor de opleiding aan te tonen. Het project Wisnet, een initiatief van onze hbo-werkgroep, beoogt dit te bereiken door de wiskunde te laten integreren in de beroepsgerichte vakken. Nadat subsidieaanvragen keer op keer werden afgewezen is het initiatief nu opgepakt door de Noordelijke Hogeschool, waar het dit cursusjaar op beperkte schaal van start is gegaan. Zodra hierover iets te melden is hoort u het natuurlijk ook.

WisKids

Door de grote aandacht voor alles wat er mis gaat, zou je bijna uit het oog verliezen wat er allemaal goed gaat. En dat is niet gering. Deze studiedag is daar een goed voorbeeld van. Het mede door de vereniging gesteunde WisKids-project heeft veel interessants opgeleverd, waarvan u vandaag kennis kunt nemen.

Euclides

U heeft allen dit jaar acht keer kunnen zien met hoeveel enthousiasme de redactie ons blad Euclides meer dan vol weet te krijgen. Elke jaargang een nieuw kleurtje en een nieuw thema voor de omslag. Het dubbelnummer is inmiddels van incident gewoon geworden. We prijzen ons gelukkig met een dergelijk enthousiasme en willen graag de redactieleden van harte danken voor hun inzet. Een mooi blad is een fraai visitekaartje. Daardoor kan het blad Euclides een goede rol vervullen in het promoten van onze vereniging. En dat is ook nodig, zoals u weet.

... applaus voor de vrijwilligers

Nieuwe leden

Op verzoek van het bestuur heeft een aantal studenten een onderzoekje gedaan naar het beeld en de bekendheid van onze vereniging bij wiskundedocenten en studenten. De PR-commissie is daarna aan het werk gegaan om onder het motto ‘je grijze cellen kleurrijk’ plannen te bedenken om de vereniging wat nadrukkelijker onder de aandacht te brengen van jongere mensen, laten we zeggen mensen die hun haar alleen maar verven omdat ze het leuk vinden.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

De ervaring leert dat leden heel trouw zijn: wie eenmaal lid is blijft dat wel zolang hij of zij in het onderwijs werkzaam is.
De eerste acties zullen daarom gericht zijn op de lerarenopleidingen en mensen die net van de opleiding af zijn.
Het bestuur kan zoiets niet zelf, we zoeken daarom enthousiaste leden die hieraan willen meewerken. Ambassadeurs op de opleiding, of een groepje jonge docenten, we staan open voor goede suggesties. Ons bestuurslid Metha Kamminga is hiervoor het aanspreekpunt.

Website

Onze website, die toonaangevende vraagbaak voor het wiskundeonderwijs, is inmiddels zo groot geworden dat het nodig is de organisatie aan te passen. Daardoor kan de enorme hoeveelheid informatie die beschikbaar is nog toegankelijker gemaakt worden. In de loop van dit jaar krijgt dit zijn beslag; regelmatige bezoekers zullen het zeker merken.
De website wordt door het jaar heen goed bezocht, met een piek in de examenperiode. De service om de resultaten van de centrale normenbesprekingen na enige tijd op de site te zetten wordt door u zeer gewaardeerd, zelfs zozeer dat de opkomst van de regionale besprekingen eronder te lijden heeft.
Met alle begrip voor de tijdsdruk waaronder men kan staan, vinden we dat toch jammer omdat hiermee een waardevol ‘interpersoonlijk collegiaal overlegmoment’ verloren gaat.
Zolang de opkomstcijfers het rechtvaardigen zetten we deze service voort.

Te koop

Dat doen we ook met de lokaalversierservice. Er is weer een aardig assortiment posters en hebbedingetjes in de stand. We hebben gelukkig een vervangster voor Sjoerd Schaafsma gevonden. Annemarie Santifort is nu de vaste standhoudster. Mede door het tijdrovende gedoe rond de Tweede fase kunnen we u helaas geen nieuwe Zebra’s aanbieden, maar er zitten een vijftiental titels in de pijplijn, dus dat komt binnenkort, zij het niet allemaal tegelijk.

Hans Wisbrun, WwF

Het Wereldwiskunde Fonds (WwF) biedt zelfs een wereldwijde service: dankzij uw bijdragen boven op de contributie en de woekerprijzen die u voor de tweedehands boeken betaalt, kunnen we elk jaar iets betekenen voor het wiskundeonderwijs op een wat minder bevoorrechte plek op de aardbol. De voorzitter van het WwF, Hans Wisbrun, heeft te kennen gegeven met het voorzitterschap te willen stoppen. Misschien herinnert u zich nog hoe Hans enige jaren geleden op een hectische jaarvergadering het WwF bijna voor de poorten van de hel heeft weggesleept. En met succes. Hij is al die jaren initiatiefnemer en drijvende kracht geweest, en we danken aan hem ook de internetveiling voor tweedehands boeken. We willen hem graag hartelijk danken voor zijn inzet de afgelopen jaren; er is veel en goed werk verricht. Hans, dank je wel.

Leen Bozuwa, advertenties Euclides

De trouwe lezers van het colofon van Euclides zal het opgevallen zijn dat Leen Bozuwa na 10 jaar is gestopt met de advertentie-acquisitie. Hij is opgevolgd door ons bestuurslid Willem Maas. Ook Leen willen we hartelijk bedanken voor de bewezen diensten, wat hij zelf overigens volstrekt overbodig vindt, maar wij niet, dus doe ik het toch.

... en al die anderen

Want het is onze overtuiging dat mensen zoals Leen en Hans en Annemarie en Gerard en Dick en Grada en Conny en Ruud en Wim, Peter en Rob en Fred en Pim en Elly en Marja en Gert en Chris en Janne en Heleen en Frans en Metha..., ach, nog zoveel anderen, mensen zoals u dus, die maken de vereniging. We zijn als bestuur trots op onze vereniging en dankbaar voor de belangeloze inzet van zovelen voor de goede zaak van het wiskundeonderwijs. We hebben elkaar nodig, dat is het afgelopen jaar wel gebleken, en samen sta je sterker dan alleen. We willen dus alle vrijwilligers hartelijk danken voor hun inzet, en ik vraag u dit te onderstrepen met een applaus.
Dank u wel.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verenigingsnieuws

Beeldverslag studiedag/ jaarvergadering 2003

Op 15 november j.l. werd de jaarlijkse NVvW-jaarvergadering/studiedag gehouden, met dit keer als thema: 'Wiskids geeft wiskunde kleur'. Een impressie.

[Metha Kamminga]

Foto's 1 t/m 4
De bezoekers van de jaarvergadering/ studiedag zijn met moeite naar de plenaire zitting te bewegen.
Er is volop drukte bij de standjes van de markt met puzzels, wiskundige hebbedingetjes en leesvoer. De Zebraboekjes van uitgeverij Epsilon (foto 1) vinden gretig aftrek.
Op foto 2 zien we, rechts van het midden, bestuurslid Henk Rozenhart.

Foto 5
Penningmeester Swier Garst geeft tijdens de jaarvergadering een overzicht van de financiële stand van zaken. Daarbij wordt ook het punt aangeroerd van een noodzakelijke verjonging van het ledenbestand om onze toekomst zeker te stellen.

Foto 6
Coördinerend inspecteur van het onderwijs buiten dienst Wim Kleijne wordt met algemene instemming benoemd tot erelid van de NVvW. Let u op het NVvW-speldje dat hij gekregen heeft bij zijn afscheid als inspecteur en nu met trots draagt.

Foto's 7 t/m 12
De plenaire lezing over veelvlakken wordt verzorgd door Marco Swaen (foto 7) die ons de vele aspecten en structuren van veelvlakken laat zien.
Thijs Notenboom (foto 8) laat daarbij zien hoe de bol die uit vlakken is opgebouwd, kan uitdijen en inkrimpen.
Onder de toehoorders bevinden zich tal van bekenden, zoals van links naar rechts Chris Zaal (voorzitter WisKids-projectteam), professor Van der Blij en professor Dirk Siersma, voorzitter van de Nederlandse Onderwijscommissie Wiskunde (foto 9).
De prijswinnaars van de Pythagoras Veelvlakkenprijsvraag worden in het zonnetje gezet door professor Van der Blij (foto 10 en 11), die dat weer met zichtbaar veel plezier en enthousiasme doet. Ook het kadootjes geven aan de jonge veelvlakkunstenaars gaat hem goed af.
Op foto 12 zien we enkele prijswinnaars op de voorste rij.

Foto 13
Tijdens de wandelende lunch met brood, soep en koffie is Agnes Verweij in een geanimeerd gesprek verwikkeld met een paar van haar (oud-)studenten.

Foto's 14 t/m 18
De bezoekers van de jaarvergadering konden kiezen uit een twintigtal workshops, die gehouden werden in de klaslokalen van het Cals College te Nieuwegein. Er werd aandachtig geluisterd (op foto 14 helemaal rechts Euclides-redactielid Wim Laaper), druk gediscussieerd (op foto 15 redactielid Klaske Blom) en uitermate serieus gewerkt aan 'leren en spelen'. Strategische spelletjes bieden rijk onderwijs - voor alle leeftijden (foto 16).
Van spel-element naar rekenen en redeneren geven workshopleider Harrie Broekman en docente Frédérique Siegenbeek getuigenis op foto 17.
Ingrid Berwald (foto 18) van het APS legt uit hoe je met een korte opdracht de leerlingen bij de les krijgt. De foto laat zien hoe Ingrid met de handen een boomstructuur uitduidt, met op de achtergrond de gele herfsttinten van de bomen die het Cals College omringen.

Foto's 19, 20, 21
Tot slot verzorgde drs. Leo Prick, bekend van zijn column in het NRC Handelsblad, de lezing rondom het hedendaagse wiskundeonderwijs (foto 19), waarbij hij nu en dan een lach aan het publiek kon ontlokken (foto 20).
Op foto 21 zien we tot slot Leo Prick in gesprek met de voorzitter van de NVvW Marian Kollenveld (rechts) en bestuurslid Marianne Lambriex (midden).

Tekst en foto's

Metha Kamminga (e-mailadres: m.kamminga@nvvw.nl).
Voor de NVvW is zij bestuurslid, voorzitter van de hbo-werkgroep en aanspreekpunt voor de PR.


1


2


3


4


5


6


12


18


7


13


19


8


14

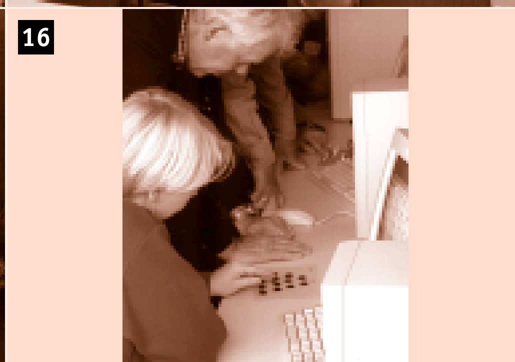

20


9

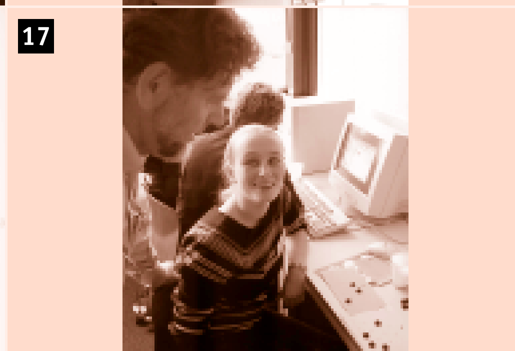

15


21


10


16


11


17

Puzzel 794 - Borromeaanse variaties

De redactie heeft mij verzocht een poging te doen om het thema 'kunst' van dit Euclides-nummer ook in de rubriek Recreatie te verwerken.

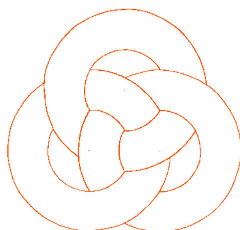
In figuur 1 ziet u de Borromeaanse ringen. Ze zijn genoemd naar een Italiaanse familie Borromeo voor wie deze ringen de onderlinge verbondenheid symboliseerden: als één van de ringen breekt, zijn de twee andere niet langer geschakeld.
De middelpunten zijn de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek; in het vervolg nemen we aan dat de lengte van de zijden 1 is. De stralen van de cirkels noemen we p en q, met $p < q$. In figuur 1 zijn de stralen zó gekozen dat er geen beweging zit in het ringenstelsel. Dat komt neer op $p = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ en $q = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.
Een Amerikaans biermerk gebruikt het Borromeaanse symbool overigens met aanzienlijk slankere ringen.

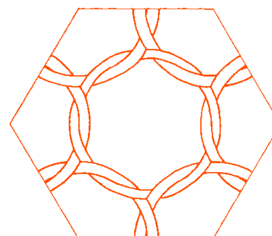
Heel andere variaties krijgen we bij de uitbreiding naar een triangulair rooster (met roosterafstand 1). Om ieder punt slaan we twee cirkels, weer met stralen p en q; $p < q$.
Als $p = \frac{1}{2}$ en $q = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, ontstaat figuur 2. Deze zeshoek is een vlakvuller. Misschien leuk voor een terrastegel; ik stel het ontwerpje gratis ter beschikking. Als het terras af is, kom ik graag even kijken. De ringen zijn hier duidelijk niet Borromeaans geschakeld.

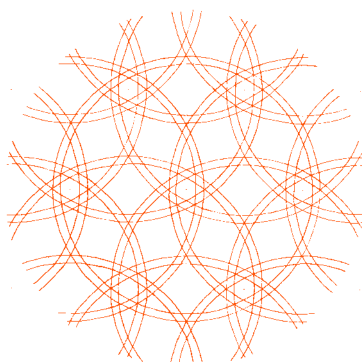
In de figuren 3 en 4 zien we triangulaire roosters met grotere ringen. Ook hier zijn de afmetingen weer zó gekozen dat er geen beweging in zit.

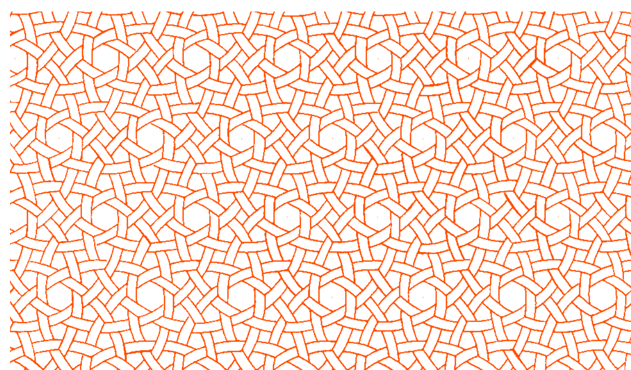
Opgave 1
Bepaal het paar p,q voor figuur 3.

Opgave 2
Bepaal het paar p,q voor figuur 4.


FIGUUR 1


FIGUUR 2


FIGUUR 3


FIGUUR 4

De Borromeaanse ringen zijn ook driedimensionaal te tekenen. Een mooi voorbeeld is de prent van Rinus Roelofs op de voorkant van het oktobernummer van Euclides. Daar zien we zes ringen om een bol; als je twee 'evenwijdige' ringen wegdenkt, blijven er vier losse over.

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 23 februari 2004.
Veel plezier!

Oplossing 'Fibonacci'

Er kwamen tien oplossingen binnen waarvan negen foutloos. Eén inzender probeerde alleen opgave 2, maar heeft deze helaas verkeerd begrepen.

In de inleidende tekst van de Fibonacci-opgave heb ik drie 'fraaie eigenschappen' genoemd. In de eerste stond een drukfout: $f(n + j)$ moest natuurlijk $f(n + 1)$ zijn.

Opgave 1

De kleinste modulus die een periode van 13 oplevert is 521. Er zijn diverse startparen mogelijk; het paar (1, 422) werd door de oplossers het vaakst genoemd. Er zijn overigens slechts 40 perioden van de lengte 13, tegenover 10420 van de lengte 26.

Eén inzender loste de opgave met alleen de computer op.
Wobien Doyer onderzocht alle perioden waarvan de lengte een priemgetal n is. Een bijbehorende modulus is
$f(n - 1) + f(n + 1) = L(n)$,
een startpaar is $(f(n + 1) + 1, f(n - 2) + 1)$.
De getallen $L(n)$ staan bekend onder de naam *Lucas-getallen* en ze voldoen aan dezelfde recursie als de Fibonacci-getallen: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...

Opgave 2

De nieuwe coëfficiënten zijn $p^2 + 2q$ en $-q^2$.
Slechts één oplosser, Dick Buijs, deed het ongeveer op de manier die mij voor ogen stond, namelijk met behulp van de karakteristieke vergelijking van de c-rij. De wortels bij de d-rij zijn de kwadraten van de wortels bij de c-rij. Het aardige is dat het niet eens nodig is om die wortels expliciet te bepalen (alhoewel dat natuurlijk niet moeilijk is).

De overige inzenders schreven de recursie voor de c-rij op voor n, $n + 1$ en $n + 2$, en bepaalden hieruit op eenvoudige wijze de gevraagde coëfficiënten. Ik heb deze methode niet eens overwogen, omdat ik er vroeger meestal mee vastliep.
Twee inzenders 'klaagden' over de eenvoud van de tweede opgave. Mijn excuses; het zal niet weer gebeuren!

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
T. Afman en W. Doyer: 160,
D. Buijs: 119,
T. Kool: 86,
L. de Rooij: 80,
A. Verheul: 79.
De volledige ladderstand is weer te vinden op de website van de NVvW (*www.nvvw.nl/euclladder.html*).

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofd-redacteur. Hieronder treft u de verschijnings-data aan van Euclides in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
5	26 februari 2004	13 januari 2004
6	15 april 2004	2 maart 2004
7	26 mei 2004	30 maart 2004
8	24 juni 2004	11 mei 2004

6 en 7 februari
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie Freudenthal Instituut
Zie pagina 124 in Euclides 79-3.

vrijdag 13 februari
BWI-middag (voor docenten en leerlingen)
Organisatie VU, Amsterdam

vrijdag 19 maart
Kangoeroe 2004
Organisatie KUN

19 en 20 maart
Finale Wiskunde A-lympiade 2004
Organisatie Freudenthal Instituut

25 en 26 maart
Nationale Rekendagen
Organisatie Freudenthal Instituut

16 en 17 april
Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres
Organisatie KWG en BWG

donderdag 22 april
4e Conferentie ICT in het onderwijs
Zie pagina 125 in Euclides 79-3.

vrijdag 14 mei
Leve de wiskunde! Open dag voor docenten
Organisatie Korteweg de Vries Instituut

zaterdag 15 mei
10e HKRWO-Symposium
Organisatie Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs
Zie pagina 201 in dit nummer.

Voor nascholing zie ook
www.nvvw.nl/nascholing.html

Voor overige internet-adressen zie
www.nvvw.nl/Agenda2.html

Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
www.nvvw.nl/Publicaties2.html

Nieuw

Netwerk en de Grafische rekenmachine



Bij de bovenbouweditie van *Netwerk* zijn nu twee boekjes over het gebruik van de grafische rekenmachine (GRM) verschenen. Deze boekjes, één bestemd voor het havo en een voor het vwo, zijn zowel geschikt voor Casio CFX-9850+ als TI-83+ gebruikers.

Wat bieden de boekjes?

- 17 uitgebreid omschreven onderwerpen in het havo boek.
- 28 uitgebreid omschreven onderwerpen in het vwo boek.
- duidelijke aanwijzingen waar en wanneer de GRM kan worden ingezet.
- in de meeste gevallen naadloze aansluiting bij de opgaven van het hoofdboek.
- mogelijkheid om uw leerlingen zelfstandig de leerstof door te laten werken.
- de boekjes kunnen bij zowel wiskunde A als wiskunde B gebruikt worden.

Neem ook eens een kijkje op www.netwerk.wolters.nl. Hier vindt u een aantal voorbeeldonderwerpen.

De boekjes zijn alleen voor rekening leverbaar. Stuur de bon in een ongefrankeerde envelop naar Wolters-Noordhoff, t.a.v. Sandra Kooijstra, Antwoordnummer 13, 9700 VB Groningen

Bestelbon

Ja, ik bestel

____ex. Netwerk havo bovenbouw grafische rekenmachine
Aanwijzingen en Onderwerpen ad. € 7,50 per deel 90 01 83376 4

____ex. Netwerk vwo bovenbouw grafische rekenmachine
Aanwijzingen en Onderwerpen ad. € 8,50 per deel 90 01 83371 3

Naam school ____________________

T.a.v. ____________________

Adres ____________________

Postcode ____________________

Plaats ____________________

Wolters Noordhoff

419/3103 – 105

Ook verkrijgbaar via de boekhandel